S. 1802. C.50.

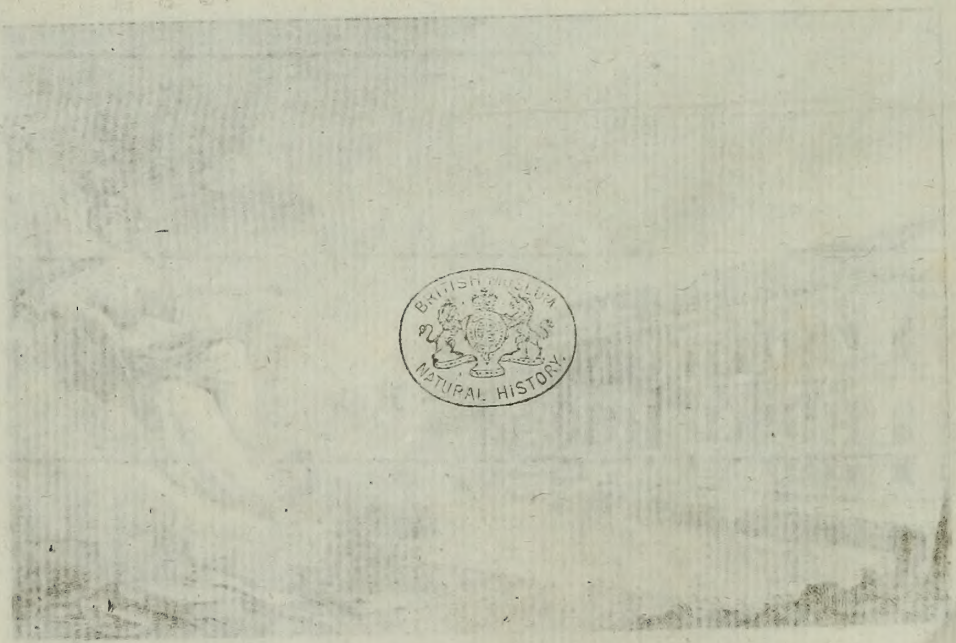
NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS III.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXV.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVIII.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMUS III.


BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARUM MDCCLXXXIII.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXV.

Avec IV. Planches.

HISTOIRE. Pag.

Cours publics. - - - - - - - - 3.
Retour de M. le Conseiller de Cour Inohodzof. - - - 4.
Voyages académiques. - - - - - - ibid.
Départ des éléves académiques pour Göttingue. - - 6.
Gratifications. - - - - - - - - ibid.
Receptions. - - - - - - - - - 7.
Assemblée publique. - - - - - - ibid.
Nouvelle question proposée pour le Prix de 1787. - - 9.
Acquisitions. - - - - - - - - - 11.
Ouvrages publiés dans le courant de l'année. - - 13.
Morts. - - - - - - - - - ibid.
Précis de la vie de M. le Conseiller d'Etat actuel de Stèhlin. - - - - - - - - 15.

Pag.

Ouvrages imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités, préſentés ou donnés à l'Académie. - - 25.

Déſcription de douze monnoyes aſiatiques d'argent, d'une antiquité très reculée, envoyées au médailler académique, de la part de Sa Majeſté l'Impératrice. *Par M. P. S. Pallas.* - - - 46.

Déſcription de cinq petites monnoyes d'argent, trouvées dans le Gouvernement de Pleskow, & remiſes par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice *au médailler académique. Par le même.* - - - - 51.

Explication de quinze monnoyes antiques, trouvées au Gouvernement de Pleskow & envoyées par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice, *au cabinet académique. Par le même.* - - - - - 53.

Extrait d'une lettre de M. Patrin, à M. le Conſeiller de Collèges Pallas, datée d'Irkoutzk' le 1 Janvier. - 57.

Sur la Congélation du Mercure: Expériences nouvelles faites par Mrs. Euler & Krafft. - - - 60.

Sur l'Analyſe chymique de quelques minéraux remarquables. Par M. Raspe. - - - - - - 63.

Avis au Public concernant un vocabulaire polyglotte. Par M. le Conſeiller de Collèges Pallas. - - 68.

Rapport de M. le Profeſſeur Krafft, ſur deux ouvrages envoyés à l'Académie par M. Giovanni Vivenzio. 72.

Réflexions ſur le Territoire Taurique & ſes environs. Par M. Zouyef. - - - - - - 76.

Extrait des lettres de Mrs. Järig & Hablitzl' adreſſées à M. le Conſeiller de Collèges Pallas. - - 81.

SUP-

Pag.

SUPPLEMENT. *Mémoires des Savans étrangers présentés à l'Académie & approuvés.* - - 87.

De Confervis paluſtribus oculo nudo inuiſibilibus. Auctore O. F. Müller. Tab. I. & II. - - - 89.

Sur les Pyramides Iſopérimètres. Par M. Simon Lhuilier, citoïen de Génève. Tab. III. Fig. 1 — 8. - 99.

Pleuronectarum duplex ſpecies, deſcripta a Marco Elieſer Bloch. Tab. IV. - - - - - 139.

Mémoire ſur l'occultation de Vénus, obſervée le 12 *Avril*, 1785. *n. St. Par M. de Lambre. Tab. III. Fig.* 9 & 10. - - - - - 144.

EXTRAIT *des Mémoires contenus dans ce Volume.*

Claſſe de Mathématique - - - - 161.

Claſſe de Phyſico-Mathématique - - - 179.

Claſſe de Phyſique - - - - - 186.

Claſſe d'Aſtronomie - - - - - 196.

VI.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS III.

Cum VII. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA

Pag.

LEONH. EVLER. *Methodus facilis inueniendi integrale huius formulae*

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2\,x^n \cos.\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2\,x^n \cos.\theta + 1}$$

caſu quo poſt integrationem ponitur vel $x = 1$ *vel* $x = \infty$. - - - - - - - - 3.

—— —— —— *De ſummo vſu calculi imaginariorum in Analyſi.* - - - - - - - - 25.

—— —— *Specimen ſingulare Analyſeos infinitorum indeterminatae* - - - - - - - 47.

—— —— *De lineis rectificabilibus in ſuperficie ſphaeroidica quacunque geometrice ducendis. Tab. I. fig.* 1 — 4 - - - - - - - 57.

—— —— *De ſuperficie coni ſcaleni, vbi imprimis ingentes difficultates, quae in hac inueſtigatione occurrunt, perpenduntur. Tab. I. fig.* 5 - - - 69.

NICOL. FVSS. *De proprietatibus quibusdam Ellipſeos in ſuperficie ſphaerica deſcriptae. Tab. II. fig.* 1 — 6 - - - - - - - - 90.

F. T. SCHVBERT. *Annotationes ad Theorema XVI. Libr. V. Pappi Alexandrini. Tab. II. fig.* 7 - 100.

PHY-

Pag.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De viribus centripetis ad curuas non in eodem plano ſitas deſcribendas, requiſitis. Tab. III. fig.* 1. 2 - - - - - - 111.

—— —— *De motu trium corporum ſe mutuo attrahentium ſuper eadem linea recta. Tab. III. fig.* 3 126.

—— —— *Solutio Problematis mechanici. Tab. III. fig.* 4 - - - - - - - - - 142.

JACQUES BERNOULLI. *Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible. Troiſieme Mémoire. Tab. III. fig.* 5. 6. 7 - - - 149.

W. L. KRAFFT. *Raccourci des Élémens dioptriques qui ſervent de baſe à la Théorie des objectifs achromatiques, applicables aux microſcopes. Tab. IV. fig.* 1 —— 4 - - - - - - 162.

PHYSICA

C. F. WOLFF. *De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio ſexta. Pars poſterior. Ventriculus ſiniſter.* Huc pertinet Tabula de ordine fibrarum cordis VI - - - - - - - 185.

—— —— *De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio ſeptima. De ſtratis fibrarum in vniuerſum* - - - - - - - - - - 227.

I. G. GEORGI. *Cinerum clauellatorum Roſſiae, itemque cinerum betulinorum examen chemicum* - - 250.

I. I. FERBER. *Mineralium quorundam rariorum recencenſio, adiectis obſeruationibus geologicis* - - 260.

BASIL. ZVYEF. *Petrefacta ignota. Tab. V. et VI* - 274.

I. T.

Pag.

I. T. KOELREVTER. *Dianthi noui hybridi* - - 277.

ERIC. LAXMANN. *Sorex caecutiens* - - - 285.

ASTRONOMICA

LEONH. EULER. *Eclairciſſemens ſur le mémoire de M. de la Grange inſéré dans le Ve Volume des mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les réſultats de pluſieurs obſervations* - - - - - - - 289.

STEPH. RVMOVSKY. *Determinatio latitudinis et longitudinis fortalitii Mosdoc, deducta ex obſeruationibus anno* 1785 *a Theodoro Tſchernoi inſtitutis* 298.

NICOL. FUSS. *Remarque ſur une nouvelle méthode de trouver l'anomalie excentrique par l'anomalie moyenne* - - - - - - - - - 302.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année* 1785 *ſuivant le nouveau ſtile* - - - - - 307.

HIS-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉE MDCCLXXXV.

En cette année commencerent les cours publics que Madame la Princeſſe de Daſchkaw avoit fondés l'année paſſée, & pour leſquels elle avoit dépoſé à la banque, comme il a été dit dans l'hiſtoire du ſecond volume de ces nouveaux Actes, une épargne de 30 mille roubles. Il y en devoit avoir quatre, mais il n'y en eut cette année que deux, parce qu'il ne ſe préſentoit pas plus d'Académiciens de la Nation dont les occupations leur permirent de s'en charger. Le premier d'entre eux fut M. le Conſeiller de Cour & Académicien Kotelnikof, qui pendant les mois d'été donna dans le grand Auditoire du College académique, des leçons de Mathématique élémentaire. L'autre M. le Conſeiller de Cour & Adjoint Socolof expliqua pendant ce même intervalle de temps la Chymie, & démontra dans le Laboratoire académique les principaux procédés de cette ſcience. Ils s'acquitterent l'un & l'autre de cette nouvelle fonction de lecteurs publics avec le plus heureux ſuccès & à la grande ſatisfaction des Auditeurs, dont le nom-

bre fut ſouvant ſi grand, qu'ils ne trouvoient pas aſſés de places dans les ſalles où ces leçons ſe donnoient.

M. l'Académicien & Conſeiller de Cour Inohodzof revint le 17 Septembre de ſon voyage aſtronomique, qui a duré au delà de quatre ans, pendant lesquels il a déterminé avec un degré de préciſion ſuffiſante, la poſition de 14 endroits de l'Empire: dont les quatre derniers, où il a obſervé en cette année, ſont Jaroslavl', Koſtroma, Wologhda' & Petroſawodsk'. M. Inohodzof en rendit un compte final à l'Académie, & après avoir remis entre les mains de M. le Conſeiller de Cour Roumoſski tous les inſtrumens qu'il avoit eus en voyage, Madame la Princeſſe lui confia le Cabinet, que feu M. Lexell avoit eu à l'Obſervatoire & ordonna de lui fournir un choix d'inſtrumens néceſſaires pour continuer à obſerver les phénomènes & mouvemens céleſtes.

Madame la Princeſſe fit partir cette année deux nouvelles expéditions académiques, mais qui ne durerent que quelques mois, & qui finirent l'une & l'autre encore avant l'hyver. La premiere fut aſtronomique: elle fut envoyée par ordre ſpécial de Sa Majeſté l'Impératrice, pour déterminer la ſituation géographique des principaux endroits de la Tauride. Le choix de Madame la Princeſſe tomba ſur M. le Conſeiller Tſchernoi, Adjoint au département Géographique: obſervateur habile & éléve de M. le Conſeiller de Cour Roumoſski, qui déja en 1769 avoit accompagné feu M. le Capitaine Islenief à Yakoutzk', où il avoit fait conjointement avec cet aſtronome l'obſervation du paſſage de Venus devant le disque du Soleil. L'Académie lui donna un éléve pour aide & un horloger méchanicien pour réparer les inſtrumens en cas d'accident. M. Roumoſski le munit d'une inſtruction détaillée, approuvée par l'Académie, & il partit en Avril. Encore avant d'ar-

d'arriver à Pérecop, un ouragan endommagea presque tous ſes inſtrumens & ſurtout le quart-de-cercle, qui eut beſoin d'une réparation conſidérable; de ſorte que notre Aſtronome ne put atteindre que vers la fin de Juin, ce premier endroit de ſa deſtination, pour y obſerver la latitude: de là il paſſa à Eupatoria (ou *Keslof*), Sebaſtropol, Théodoſia (ou *Kefa*) & Yenikala, où il fit les obſervations aſtronomiques requiſes pour la détermination de leur poſitions géographiques. Enſuite il paſſa dans le Gouvernement de Caucaſe, & s'arrêta à Mosdoc & Ekaterinograd; de là il partit pour Stawropol ſur la ligne de Mosdoc, où il eut le malheur d'être ſurpris & pillé par une troupe de brigands Lesgiens, qui tuerent un Coſaque de ſa ſuite & en bleſſerent deux, & qui après avoir briſé divers inſtrumens, enléverent avec eux ſon élève nommé Arnoldi, qui depuis n'a plus reparu, & que toutes les perquiſitions n'ont pu faire recouvrer jusqu'ici. Ce nouvel accident & ſa ſanté délabrée ne lui permirent plus de continuer à faire les obſervations qui lui reſterent encore: il ſe rendit à Tſcherkaski & retourna d'ici par Moscou à St. Pétersbourg, où il revint vers la fin de l'année.

L'autre expédition eut pour objet une deſcription phyſique des côtes & des environs des lacs de Ladoga & d'Onega. Ce fut M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski qui l'entreprit par ordre de Madame la Princeſſe: il s'embarqua le 10 de Juin, & après avoir fait quelque ſejour à Serdopol, Olonez, Powénez, Ladunepol & Petroſawodsk, d'où il adreſſa à l'Académie ſes rapports concernant le ſuccès de ſes recherches en Phyſique & Hiſtoire naturelle, il revint à St. Pétersbourg le 26 Septembre, chargé d'une recolte conſidérable pour le Muſée Académique.

Madame la Princeſſe fit un choix de quatre éléves académiques, qu'elle envoya à Göttingue pour y faire leurs études & ſe préparer à pouvoir quelque jour occuper dignement des places à l'Académie. On leur donna des inſtructions & divers Académiciens y joignirent des lettres de recommandation adreſſées à Mrs. les Profeſſeurs de l'Univerſité dont ils doivent fréquenter les leçons. Ils partirent en Juillet.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw fit cette année des gratifications conſidérables pour améliorer le ſort des perſonnes attachées à l'Académie. Elle augmenta les appointemens du Secrétaire, de Mrs. les Académiciens Wolff, Inochodzof, Fuſs, & de l'Adjoint Socol f: elle accorda enfin à M. le Conſeiller de Cour Hablitzl, Correſpondant de l'Académie à Simpheropol en Tauride, la penſion académique de deux cent roubles.

Mrs. le Conſeiller de Collèges Pallas & le Conſeiller de Cour Stritter à Moscou furent le 22 Septembre, jour de l'anniverſaire du Couronnement de Sa Majeſté l'Impératrice, decorés de l'Ordre de St. Wolodimer de la 4e Claſſe.

M. le Profeſſeur Ferber ayant repréſenté la néceſſité de faire un tour en Suede pour y regler quelques affaires de famille, Madame la Princeſſe lui accorda un congé de quatre mois, qu'elle prolongea enſuite encore d'un mois. M. Ferber partit en conſéquence le 24 Février & revint le 31 Juillet.

Le 13 Juin, Madame la Princeſſe ayant jugé à propos de faire une exception à la regle préſcrite, de ne pas recevoir de

de membre étranger, avant qu'il n'y eut ſix vacances (*), elle fit propoſer pour être agréés dans cette claſſe d'aſſociés

M. l'Abbé Rochon, des Académies royales des Sciences & de la marine de Paris: Garde du Cabinet de Phyſique du Roi, à Paris.

M. Jean Vivencio, Premier Médecin de S. M. le Roi des deux Siciles & Chevalier de l'Ordre royal & militaire de St. George: de l'Académie de Médecine de Paris, & de la Société patriotrique de Milan, à Naples.

L'Aſſemblée ayant acquiescé aux raiſons que Madame la Princeſſe leur chef avoit données en faveur de ces deux recipiendaires, elle paſſa au recueil des voix, & l'agrégation ſe fit unanimement.

Une autre reception de Correſpondant étranger ne ſe fit pas moins unanimement dans l'Aſſemblée du 28 Novembre: celle de

M. Jean-Elert Bode, Aſtronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Pruſſe à Berlin

qui s'eſt diſtingué par ſon zéle pour le progrès des connoiſſances aſtronomiques, & qui s'eſt toujours prêté avec complaiſance à communiquer à l'Académie toutes les obſervations & nouveautés qui parviennent à ſa connoiſſance.

L'Académie célébra le 27 Décembre le ſoixantieme anniverſaire de ſa fondation, par une aſſemblée publique, à laquelle

(*) Hiſtoire de 1784. pag. 6.

laquelle elle avoit fait inviter tous ſes membres honoraires, ainſi que les plus notables perſonnes de la ville.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw, exerçant les fonctions de ſa préſidence, ouvrit la ſéance par un discours rélatif à la circonſtance. Le Secrétaire rapporta enſuite ce qui concernoit les queſtions que l'Académie a propoſées pour les Prix des années précédentes.

Celle ſur laquelle le jugement devoit être prononcé dans cette Aſſemblée, avoit pour objet une claſſification exacte & naturelle des divers foſſiles dont les couches qui forment la ſurface de notre globe ſont compoſées. L'Académie décernà le Prix au mémoire allemand qui avoit pour deviſe: *Avulſa ſaxa ſaxis.* Le billet cachété ayant été ouvert, on y trouva le nom de M. Charles Haidinger, Garde-Adjoint du Cabinet des Curioſités naturelles de S. M. Impériale à Vienne. Deux autres mémoires obtinrent l'acceſſit: l'un en françois, déſigné par la déviſe: *Sane multum illi egerunt qui ante nos fuerunt, ſed non peregerunt: multum adhuc reſtat operis, multumque reſtabit:* où la claſſification des diuerſes eſpèces de terres, de pierres eſt rangée dans un ordre fort ſyſtematique; indiquant deplus les principaux lieux, où l'on trouve les plus remarquables de ces productions. L'autre mémoire françois, dont l'épigraphe eſt, *Rerum cognoſcere fines & cauſas*, contient auſſi des vües ingénieuſes & des détails intéreſſans, qui lui ont fait accorder le ſecond acceſſit, ſans que l'Académie prétende adopter par là les hypothèſes qui ſervent de baſe au ſyſtème de l'Auteur. Les billets qui appartiennent à ces deux pieces ne furent par conſéquent pas brûlés, mais depoſés cachetés comme ils l'étoient, pour

être

être ouverts dans le cas que les auteurs vouluſſent ſe faire connoitre & permettre, que leurs noms ſoient imprimés. (*).

M. le Prof. Géorgi lut, en allemand, l'extrait de la piece couronnée.

Le Secrétaire rappella enſuite que le prix concernant la force qui pouſſe le ſuc nourricier dans les animaux & la ſêve dans les végétaux, jusqu'aux extrémités des plus petits vaiſſeaux, étoit renvoyé au premier Juillet 1786, aucune des pieces qui ont concouru ſur ce ſujet propoſé dès l'année 1782, n'ayant encore rempli l'attente de l'Académie.

Le Secrétaire lut enfin la nouvelle queſtion, qui avec l'approbation de Madame la Princeſſe a été propoſée pour le prix de l'année 1787. En voici l'énoncé:

Quoique jusqu'à préſent aucune comète ne ſe ſoit aſſés approchée de la terre pour cauſer du changement à ſon état, les obſervations les plus exactes n'en ayant pas découvert le moindre veſtige; on a vu cependant quelques comètes, qui en traverſant notre ſyſtème planétaire, n'étoient qu'à une diſtance de la terre treize fois plus grande que celle de la lune; celle de 1770 paroiſſant même s'en être encore approchée d'avantage: & comme les élémens des orbites dans lesquelles les comètes ſe meuvent, ſurtout lorsque ces mouvemens ont lieu dans des plans

(*) L'un & l'autre ſe ſont nommés depuis, & leurs billets ont ſur cela été ouverts. L'auteur du premier acceſſit s'eſt trouvé être M. de Launay, de l'académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Lettres à Bruxelles: Et celui du ſecond acceſſit M. l'abbé Soulavie, Aſſocié de diverſes Académies & depuis Correſpondant de l'Académie Impér. des Sciences.

plans qui different peu du plan de l'écliptique, peuvent éprouver des changemens conſidérables par l'action des corps céleſtes, ce que l'exemple de la comète vue en 1759 a démontré; il eſt probable que dans la ſuite des temps quelque comète, après avoir fait diverſes révolutions pourroit tellement s'approcher de la terre, que ces deux corps exerceroient des actions réciproques l'un ſur l'autre. Feu M. Leonhard Euler, dont les Mathématiciens ne ceſſeront jamais de vénérer le nom, a développé, avec la ſagacité qui lui étoit propre, dans le Tome XIXe des nouveaux Commentaires, le cas où une comète s'avançant dans le plan de l'écliptique, ſeroit ſuppoſée aller droit au ſoleil; & en calculant la perturbation que cette comète éprouveroit, il a frayé la route à la ſolution du Problème ſuivant, qui doit ſervir de queſtion pour l'année 1787:

Si une comète s'approchoit aſſés de la terre, pour que l'action réciproque de ces deux corps devint ſenſible, determiner:

1.) Quelles inégalités en réſulteroient dans le mouvement de notre globe compoſé de terre & d'eau?

2.) Quels ſeroient en particulier les phénomènes qu'on devroit s'attendre à voir arriver dans l'Océan?

3.) Enfin comment ces deux corps, après l'exercice de leur action réciproque, continueroient leur cours?

L'Académie dans un Programme imprimé en latin & en ruſſe invita à ſon ordinaire les ſavans de toutes les nations qui voudront travailler ſur ce ſujet, à envoyer leurs mémoires avant le 1er Juillet 1787, pour être ſoumis au jugement des académiciens ordinaires, dont aucun ne peut concourir; & promit

promit d'adjuger dans la premiere aſſemblée publique qui ſuivra ce terme de concours, le prix de cent ducats d'Hollande à celui qui aura le mieux reſolu cette queſtion. Les autres conditions requiſes en pareil cas, qui ſe trouvent dans ſon programme, ſont ſuffiſamment connues.

L'Académie a fait des acquiſitions très conſidérables dans le cours de cette année.

En échange d'une magnifique coupe d'or garnie d'antiques, qui ſe trouva au muſée académique & qui fut transportée au cabinet des raretés de Sa Majeſté l'Impératrice, cette gracieuſe Souveraine & Protectrice des Sciences ordonna d'acheter pour l'Académie un cabinet de minéraux: une telle acquiſition ayant plus de rapport aux ſciences que l'Académie cultive, & les collections qui s'y trouvent en ce genre n'étant que très incomplettes. Le choix tomba d'abord ſur le cabinet de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, qui ſe trouva dépoſé à la maiſon d'éducation pour les Démoiſelles nobles; mais comme l'abſence du proprietaire, qui s'eſt établi à Irkutzk', occaſionnoit des difficultés pour le retirer de l'endroit où il étoit, Madame la Princeſſe tourna ſes vües ſur un autre cabinet qui n'étoit pas moins conſidérable, & qui appartenoit à S. E. Mr. de Nartof, Conſeiller d'État actuel & Chevalier de l'ordre royal Danois de Dannebroek. Celui-ci le vendit pour huit mille roubles, que Sa Majeſté l'Impératrice fit payer tout de ſuite de ſa chatouille. Madame la Princeſſe chargea là deſſus Mrs. les Académiciens Ferber, Ozeretskofski & Gèorgi de le recevoir des mains de l'ancien proprietaire, & de le faire tranſporter au bâtiment de l'Académie.

Ce cabinet contient une grande & belle collection de minéraux indigènes, & le catalogue en eſt de cinquante feuilles.

Outre ceux-ci s'y trouvent encore ſans catalogue 1533 minéraux étrangers, 139 minéraux ruſſes, & 91 foſſiles ou pierres tant étrangeres qu'indigènes.

Une ſeconde acquiſition qui n'eſt pas moins précieuſe eſt celle d'un miroir ardent de métal, avec deux miroirs paraboliques de cuivre jaune battu & argenté, que Sa Majeſté l'Impératrice a fait acheter en Allemagne pour dix mille florins & dont Elle a fait préſent à l'Académie. Cette magnifique piece arriva en Septembre & fut dépoſée & montée dans la ſalle d'aſſemblées, où elle reſtera, jusqu'à ce que par le transport de quelques départemens académiques au nouveau bâtiment, il ſe trouvera des chambres vuides & aſſés ſpacieuſes pour y placer le cabinet de Phyſique expérimentale. Ce miroir a quatre pieds & demi de diamètre, & eſt de même compoſition que les miroirs des Teleſcopes. Sa ſurface ayant donc 38476 lignes quarrées, & ſon foyer qui ſe forme à la diſtance de 4 pieds & demi, n'étant que de 3 lignes, la chaleur qui s'y concentre ſurpaſſe 12800 fois celle du Soleil, & eſt par conſéquent ſi grande qu'aucun corps n'y peut réſiſter ſans changer de nature. Auſſi tous les métaux s'y fondent en peu de ſecondes: l'asbeſte qui eſt une matiere reconnue incombuſtible, s'y vitrifie en 12 ſecondes: & ſi l'on paſſe devant une buche de bois verd, la flamme en ſort avec violence & fait une exploſion, comme ſi c'étoit de la poudre à canon. Au reſte cette piece eſt auſſi bien polie que les glaces des miroirs, & n'a aucun défaut; de ſorte qu'elle repréſente avec une grande vivacité devant lui, comme ſuſpendus en l'air, tous les objets qu'on y approche. Enfin ce miroir eſt monté & encadré proprement & on le dirige par un méchanisme à rouage avec beaucoup d'aiſance; il eſt de plus porté ſur quatre roues de cuivre par le moyen desquelles on peut le méner & le manoeu-

noeuvrer à volonté. L'artiſte eſt M. Charles Lefebure, Méchanicien de S. A. Séréniſſime Électorale de Cologne. Les deux miroirs paraboliques ont deux pieds de diamètre & leurs ſurfaces argentées & bien polies, renvoyent la lumiere avec beaucoup de force.

Un préſent très agréable encore, que l'Académie reçut au mois d'Août de l'Académie Royale des Sciences de Paris, fut celui du buſte d'un des ſes plus célèbres aſſociés étrangers, feu M. d'Alembert, fait dix ans avant ſon déces, par M. le Comte en 1773. Ce monument précieux fut plaçé dans la ſalle principale de la Bibliothèque académique.

Enfin un chronomètre pour la détermination des longitudes en voyage, que feu M. Lexell avoit encore commandé pour l'Académie chez l'horloger célebre Arnold, lors de ſon ſejour à Londres, & qui enſuite a été vérifié & examiné par M. Maskelyne à l'obſervatoire de Greenwich.

Les autres acquiſitions moins conſidérables ſe trouvent indiqués ci-deſſous à l'Article *Ouvrages, machines & inventions préſentées à l'Académie.*

L'Académie a publié dans le courant de l'année 1785 le Xe volume de ſes Actes qui contient l'hiſtoire du dernier ſemeſtre de 1781 & dix-neuf mémoires de Mathématique & de Phyſique: & outre quelques traductions ruſſes d'ouvrages ſcientifiques, parut auſſi le 1er volume des voyages du defunt Prof. Falk, rédigées par M. le Prof. Géorgi.

L'Académie a fait diverſes pertes, parmi leſquelles la principale a été celle du Conſeiller d'État actuel de Stèhlin, le dernier des anciens Académiciens ordinaires, qui vivoit

encore depuis le temps antérieur au renouvellement de l'Académie ſous l'Impératrice Eliſabeth de glorieuſe mémoire: on trouvera un précis de ſa vie littéraire à la ſuite de cette hiſtoire.

Les autres morts ſont:

1.) du nombre des Aſſociés externes

Le R. P. Paul Friſi, Barnabite, Profeſſeur Impérial de Mathématiques à Milan: reçu au nombre des Aſſociés en 1756.

M. Jean-Gottſchalk Wallerius, Chevalier de l'ordre Royal Suédois de Waſa, ancien Profeſſeur de Chymie, de Métallurgie & de Pharmacie à l'Uni erſité d'Upſal: où il eſt décédé le $\frac{5}{17}$ Novembre 1785 dans ſa 77e année. L'Académie l'avoit reçu au nombre des Aſſociés externes le 29 Décembre 1776.

2.) du nombre des Correſpondans regnicoles

M. Jean-Henri-Gottlieb Engel, Docteur en Médecine, Aſſeſſeur de Collèges & Chirurgien opérateur au Grand Hôpital à Moscou: reçu au nombre des correſpondans titrés le 10 Juin 1779, & mort le 11 Février 1785.

M. Adrian Socolof, Aſſeſſeur de Collèges & Inſpecteur des Plantages Impériales à Aſtrachan. Reçu au nombre des correſpondans en 1776 & mort le 29 Janvier 1785.

M. Guillaume Lagus, Lieutenant & Aide-de-Camp de S. E. Mr. le Gouverneur-Général de Permie & de Tobolsk'

Tobolsk', Chevalier de Kaſchkin. L'Académie l'avoit reçu au nombre de ſes correſpondans le 20 Novembre 1783: il mourut le 16 Juin 1785.

Précis de la vie de M. de Stèhlin.

Jacques de Stèhlin, Conſeiller d'Etat actuel, Directeur des départemens des Beaux-Arts à l'Académie Impériale des Sciences, & Secrétaire perpétuel de la Société libre économique de St. Pétersbourg: Membre de l'Académie Royale d'Hiſtoire de Madrit, des Sociétés Royales des Sciences & des Antiquités de Londres, de la Société hollandoiſe de Harlem, de celle des belles-lettres de Leipzig, de l'Inſtitut hiſtorique de Göttingue & de la Société de la culture des abeilles dans la Haute-Luſace: Naquit à Memmingue, ville libre impériale de la Souabe, le 10 Mai 1709.

Son pére étoit du grand Conſeil de cette ville, & ſes ancêtres avoient depuis d'anciens temps été révétus d'emplois conſidérables tant civils qu'écleſiaſtiques à Bâsle, Memmingue & Augsbourg. Le jeune Stèhlin fréquenta d'abord le Lycée de ſon lieu natal; en 1728 ſon père l'envoya au Gymnaſe de Zittau, où il s'appliqua pendant près de 3 ans aux langues, aux belles-lettres & aux beaux-arts: c'eſt ici qu'il apprit auſſi l'art des feux d'artifices, chez un Italien qui dans ce temps là paſſa pour y exceller. En quittant cet inſtitut en 1731, il y fit imprimer & defendit publiquement ſa diſſertation *de indole hominis & optimi principis, exemplo Traiani demonſtrata.* Il parcourut enſuite les principales villes de l'Allemagne & y viſita les bibliotheques, les ſavans & les artiſtes les plus célebres. Il s'arreta ſur tout à Dresde, où il trouva de quoi ſatisfaire ſon

ſon penchant pour les beaux-arts. Delà il ſe rendit à l'Univerſité de Leipzig où il vécut près de trois ans. C'eſt ici qu'il ſe perfectionna non ſeulement dans ſes études favorites, la poéſie, la mythologie, la numismatique & les antiquités: mais qu'il puiſa encore cette teinture univerſelle de toutes les ſciences, par laquelle il s'eſt fait généralement aimer dans toutes les ſociétés. Il publia dans la derniere année de ſon ſejour à Leipzig, une traduction allemande de Sapho en vers, dans le même mêtre que l'original grec, imprimé à côté: ainſi que d'autres traductions d'ouvrages italiens & françois qui alors étoient en vogue. Enfin pendant les fêtes qui ſuivirent l'avénement au throne du Roi de Pologne Auguſte III., il s'amuſa à inventer pour les illuminations ſolemnelles, pluſieurs repréſentations allégoriques, qui furent goutées par le public & admirées par les connoiſſeurs.

M. le Baron de Korff, Chambellan actuel de Sa Majeſté l'Impératrice Anne Iwanowna de Ruſſie, & dans ce temps Préſident de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, ayant pris connoiſſance des talens du jeune M. de Stehlin, il conçut l'idée de l'attirer au ſervice de l'Académie; il en ſentit d'autant plus le beſoin, que c'étoit toujours à l'Académie que la cour s'adreſſoit pour les inventions allégoriques dans les illuminations & les grands feux d'artifices qui alors ſe donnerent très fréquemment, & que perſonne ne ſe trouvoit alors à l'Académie qui eut été ſuffiſamment verſé dans cette partie. M. de Stehlin reçut en conſéquence à la fin de l'année 1734, étant encore à Leipzig, une vocation d'Adjoint de l'Académie en Hiſtoire pour cinq ans: mais il déclina cette premiere vocation alleguant pour raiſon qu'un engagement de tant d'années lui paroiſſoit à ſon âge une contrainte trop forte, ſurtout pour les paſſer dans un climat auſſi froid que l'eſt

l'eſt celui de St. Pétersbourg. Il quitta ſur cela l'Univerſité de Leipzig au mois de Janvier 1735 & ſe rendit à Dresde, où il devoit entrer comme Secrétaire auprès du Général Baron de Loewendahl, & accompagner enſuite le fils aîné dans ſes voyages, ce qui lui ſembloit être une perſpective plus riante & pour ſon âge & pour ſon penchant: mais pendant qu'il y étoit à attendre l'arrivée du Général, que des affaires obligoient de s'arrêter en Pologne, il reçut du Baron de Korff une ſeconde vocation, dans laquelle on lui accordoit la liberté de quitter le ſervice en tout temps, après en avoir demandé la permiſſion une demi-année d'avance. Cette liberté fit pencher la balance, & M. de Stèhlin retourna vers la fin d'Avril à Leipzig, à fin d'y concerter avec le Profeſſeur Lotter également engagé pour l'Académie: ils partirent donc enſemble & après avoir paſſé quelques ſemaines à Wittenberg, Berlin & Hambourg, il s'embarquerent à Lubec & arriverent à St. Pétersbourg le 25 Juin. M. de Stèhlin ſe rendit tout de ſuite à Péterhof, auprès de M. le Baron de Korff, qui lui fit le meilleur accueil & qui le préſenta encore le même jour à la cour.

Ses premieres occupations à l'Académie conſiſterent à rédiger la Gazette allemande, ou plutôt à l'écrire presqu'en entier. Il donna enſuite pluſieurs articles pour les remarques hiſtoriques, qui alors furent publiées avec les gazettes; & il fit par ordre du Préſident, des extraits allemands des comédies & intermezzos italiens, repréſentés deux fois par ſemaine, pour être diſtribués à la cour avant leur repréſentation. Il compoſa auſſi pour les fêtes particulieres de l'Impératrice & à l'occaſion de diverſes rejouiſſances publiques, pluſieurs odes & poéſies fugitives, qui lui concilierent la bienveuillance de la cour. Il fournit au Corps d'Artillerie les inventions & eſquiſſes des repréſentations allégoriques pour les feux d'artifices & les

illuminations: il projetta enfin les deſſins & donna les inſcriptions pour les diverſes médailles, qui furent frappées en mémoire des événemens & époques remarquables.

Le 14 Octobre 1737. M. de Stèhlin fut reçu Académicien ordinaire & nommé Profeſſeur d'Éloquence & de Poéſie, toujours ſous la condition de pouvoir quitter le ſervice dès que l'envie lui en prendroit, en le dénonçant ſeulement une demi-année d'avance. Il lut en cette nouvelle qualité un cours public du Droit naturel & de la Philoſophie morale, & il en donna un autre ſur la petite logique de Wolff. En cette même année M. de Korff le chargea de l'intendance du departement des graveurs & de la direction des remarques que l'Académie continuoit de publier avec ſes gazettes.

L'Impératrice Anne étant décédée au mois d'Octobre 1740, M. de Stèhlin fut employé dans la commiſſion de deuil: il y fournit les idées pour la décoration allégorique des appartemens funebres, du catafalque & de l'épitaphe dans l'égliſe de St. Pierre & Paul à la fortereſſe, & il eut l'inſpection de la conſtruction de ces divers monumens. Enſuite il en compoſa la déſcription, qu'il inféra dans les remarques aux gazettes de 1741.

Sous la préſidence du Conſeiller privé M. de Bevern, M. de Stèhlin fut chargé de refondre la Grammaire allemande que l'Académie avoit fait imprimer à l'uſage de ſes éléves, & de l'augmenter d'une proſodie complette. Il fit auſſi les inventions & les esquiſſes des cartouches pour les cartes de l'Atlas Ruſſe que l'Académie publia en cette année, & il eut l'honneur de préſenter à Sa Majeſté l'Impératrice Eliſabeth, à la fête de ſa naiſſance, une ode ſur ſon avenement au Throne, qu'il avoit compoſée au nom de l'Académie.

La

La cour étant partie en 1742 pour Moscou pour le Couronnement de Sa Majeſté l'Impératrice, M. de Stèhlin eut ordre de la ſuivre pour projetter & diriger les fêtes multipliées qui s'y donnérent à cette occaſion: c'eſt ici qu'il introduiſit pour la premiere fois dans les feux d'artifice, des plans compoſés d'une grandeur coloſſale. L'Impératrice le nomma après la clotûre de ces fêtes, Précepteur du Grand Duc Pierre Feodorovitſch, fonction qu'il exerça pendant trois ans, à l'expiration desquels il fut decoré du titre de Conſeiller de cour & gratifié de mille roubles d'appointemens annuels.

Du retour à St. Pétersbourg, il fut encore chargé de fournir des inventions allégoriques pour les feux d'artifices & les illuminations données au ſujet de la paix conclue avec la Suede. À cette occaſion il inventa & introduiſit dans les feux d'artifices, des figures mouvantes, qui furent très applaudies à la cour & perfectionnées enſuite de plus en plus.

En 1745, au renouvellement de l'Académie, M. le comte Kyrille de Razoumoſski en ayant été nommé Préſident, il chargea M. de Stèhlin de la direction des départemens des Arts, que notre Académicien étendit de plus en plus, & où il forma pluſieurs habiles éléves. Il parvint ainſi à établir en 1748, auprès de l'Académie des Sciences, une Académie des beaux-arts, dans laquelle les graveurs, architectes, modeleurs, ſculpteurs & autres artiſtes attachés à l'Académie, étoient obligés de s'exercer deux fois par ſemaine dans les deſſins d'après Nature. C'eſt à cet établiſſement que l'Académie dut pluſieurs bons graveurs, des ouvrages desquels exiſtent encore les plans & les vûes de St. Pétersbourg, ainſi que tant d'autres eſtampes & tailles douces, qui ſe debitent encore aujourd'hui à la librairie académique.

La Bibliothéque & la chambre des rarétés ayant été détruites par une incendie en 1747, M. de Stèhlin fut chargé par une oukaſe de reconſtruire cet édifice, & il l'acheva en trois ans à la grande ſatisfaction du Préſident, qui lui fit aſſigner en recompenſe une augmentation de gages de 200 roubles par an.

En 1757 M. de Stèhlin fut nommé membre de la chancellerie académique & Directeur du département des beaux-arts: enſuite cenſeur des ouvrages en belles-lettres, hiſtoire & beaux-arts, écrits en langues étrangéres.

Notre Académicien fut encore placé dans la chancellerie Impériale des monnoyes, avec voix & ſéance, à fin d'y diriger les médailleurs & les élèves dans leurs travaux, & de fournir les inventions des revers pour les nouvelles médailles que l'Impératrice faiſoit frapper: emploi qui lui valut une penſion annuelle de 600 roubles. Ces fonctions rélatives aux médailles, & celles qu'il avoit à la chancellerie académique l'occuperent ſans relâche jusqu'en 1762, où après le decès de l'Impératrice Eliſabeth de glorieuſe mémoire, il fut d'abord requis pour la commiſſion funebre & chargé de fournir des inventions & des deſſins pour les décorations de la ſale funebre, le catafalque dans l'égliſe de la fortereſſe, & l'épitaphe. À peine s'étoit-il acquitté de cette charge, qu'il fut expédié par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice actuellement regnante pour Moscou, où il fut employé dans la commiſſion pour les préparatifs du Couronnement, & où il donna non ſeulement l'esquiſſe d'un grand feu d'artifice avec des figures mouvantes, ainſi que de pluſieurs illuminations & de tous les ornemens allegoriques du Palais Impérial, mais dont il ſoigna encore l'execution, en dirigeant les travaux des artiſtes dans leurs attéliers.

En

En 1763 M. de Stèhlin fut nommé Conſeiller d'Etat. En 1765 il prit le tître & les fonctions de Secrétaire perpétuel de l'Académie, en ſe chargeant de la regiſtrature des archives & en rétabliſſant la Correſpondance étrangère: l'année ſuivante Sa Majeſté l'Impératrice le nomma membre de la commiſſion académique établie ſous M. le comte Orlof, à qui S. M. avoit confié la Direction de Son Académie des Sciences.

La même année il fut élu par la pluralité des voix Député de l'Académie des Sciences pour la commiſſion des loix, qui a été établie à Moscou pendant le ſéjour de la cour en cette capitale: mais il déclina cet honneur & propoſa à ſa place M. le Conſeiller de Colleges Müller, que l'Académie accepta.

En 1769. M. de Stèhlin reſigna ſa place de Secrétaire perpétuel des conférences académiques, & la remit avec les archives à M. le Profeſſeur Euler le fils, que le comte Orlof en revetit. Se trouvant par là moins occupé qu'auparévant, il employa les loiſirs que lui laiſſerent ſes autres fonctions, à achever l'hiſtoire de l'état & des progrés des beaux arts en Ruſſie, ouvrage qu'il avoit déja depuis long-temps couché par écrit ſous le tître: *Nachrichten von den ſchönen Künſten in Rusland*, & dont il fit imprimer encore dans cette même année la premiere partie, qui comprend le théatre, les ballets & les danſes, dans le 1er volume *der Beylage zum neuveränderten Ruſsland* par M. Schlözzer. La ſeconde partie qui roule ſur la muſique en Ruſſie, fut depuis inſérée au ſecond volume du même ouvrage. Il s'occupa enſuite de la rédaction des anecdotes ſur Pierre le grand, qu'il avoit recueillies dans l'eſpace de plus de trente années, de la bouche même des perſonnes qui avoient vecu du temps de ce reſtaurateur de la Ruſſie: & il acheva à la

fin de 1774 les inventions pour une ſuite de 125 revers de médailles ſur la vie & les actions de Pierre le grand. Ouvrage orné des beaux deſſins, qui fut préſenté à Sa Majeſté l'Impératrice & qui eſt reſté en manuſcript. (*)

Dans les promotions qui eurent lieu à l'occaſion de la célébration de la paix conclue en 1775 avec la Porte Ottomane, M. de Stèhlin obtint le tître de Conſeiller d'Etât actuel.

Il eut enſuite beaucoup de part à la célébration du Jubilé, ou du cinquantieme anniverſaire de la fondation de l'Académie des Sciences: il projetta non ſeulement les décorations du bâtiment académique & ſurtout de la ſalle d'aſſemblées pour cette journée ſolemnelle, mais il en dirigea encore lui même l'execution.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant ſuccédé en 1783 dans la Direction de l'Académie, & la commiſſion académique ayant été abolie, M. de Stèhlin ſe vit encore plus libre d'occupations & ſe chargea de nouveau de la direction de la gazette, qui avoit été ſa premiere fonction en arrivant en Ruſſie.

La Société libre économique qui l'avoit reçu au nombre de ſes membres dès la ſeconde année de ſa fondation en 1766, le chargea peu de temps après du ſecrétariat pour la correſpondance étrangère, auquel feu le Conſeiller de cour Lehmann venoit de reſigner. M. de Stèhlin s'en acquitta jusqu'à ſa fin avec ce

(*) Le premier ouvrage n'a paru qu'après ſa mort: Mad. la douairiere Conſeillere d'Etat de Stèhlin en a fait préſenter un exemplaire à l'Académie, ainſi qu'une copie du dernier ouvrage manuſcript.

ce zéle vif qui animoit toutes ſes actions, & contribua encore diverſes pieces pour les collections que cette Société publie ſous le tître de трyды вольнаго экономическаго общества.

En 1784 et 1785, notre Académicien continua comme il avoit fait jusqu'ici, à fournir des inventions & esquiſſes, tant pour les décorations typographiques des ouvrages que l'Académie publioit, que pour les revers des nouvelles médailles que la cour & le dirigeant Sénat faiſoient frapper, en mémoire des actions grandes & bienfaiſantes qui ſignalent le regne glorieux ſous lequel nous vivons.

M. de Stèhlin étoit d'une humeur égale & gaye, & ſes excellentes vertus le faiſoient aimer & eſtimer de toutes les perſonnes qui le connoiſſoient. Auſſi fut il fort recherché & très bien reçu dans toutes les Sociétés.

Il jouïſſoit d'une ſanté qui paroiſſoit inaltérable, & à laquelle ſon caractère égal & heureux avoit aſſurément la plus grande part. Ce ne fût que vers le printemps de 1785 que ſa ſanté reçut un choc & qu'elle empira de plus en plus. M. de Stèhlin s'affoiblit conſidérablement, & ſa maladie ſe declara enfin en hydropiſie de poitrine. Il conſerva cependant jusqu'au dernier ſouffle de ſa vie une patience héroique & une réſignation vraiment chrétienne. C'eſt ainſi qu'il mourut fort tranquillement le 25 Juin 1785 dans ſa 77eme année, après avoir ſervi l'Empire de Ruſſie ainſi que l'Académie Impériale des Sciences pendant l'eſpace de 50 années complettes.

M. de Stèhlin avoit épouſé en 1742, *Eliſabeth Reichmuth* fille de J. Reichmuth, premier Prédicateur & Paſteur de l'Egliſe luthérienne à Moscou: de ce mariage lui ont ſurvecu trois

trois enfans; un fils, Pierre de Sthèlin, Conseiller de Légation, qui s'est fait connoître dans le monde littéraire par une traduction allemande de la Chronique abrégrée des Souverains de Russie par M. Lomonossof, & deux filles, qu'il avoit eu la satisfaction d'établir encore de son vivant.

Outre les ouvrages du défunt Académicien, dont nous avons parlé dans ce précis de sa vie, nous indiquerons les suivans:

Lobrede auf Johann Hommel, Kaiser Karl V. Hofmathematicus. Memmingen 1728.

Prologo, la Russia affiitta e riconsolata, imprimé & représenté à Moscou en 1742, pour la fête du couronnement de l'Impératrice Elisabeth.

Kurtze geographische Beschreibung des Fürstenthums Moldau, und der zwischen dem schwartzen Meere und der kaspischen See gelegener Länder und Völker. 1770.

Von Tschirkassien oder den Kabardinischen Landen 1772. inséré dans le magazin géographique de M. le D. Büsching.

Kurtze Nachricht von dem neulich entdeckten Nord-Archipelagus 1774.

OU-

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, préſentés ou donnés à l'Académie en l'année 1785.

Le Vendredi 17 Janvier. Son Excellence Madame la Princeſſe de Daſchkaw faiſant les fonctions de Directeur, a envoyé de la part de Sa Majeſté Impériale, pour être dépoſé au médailler académique, douze monnoyes d'argent aſiatiques d'une antiquité très reculée, avec une explication préſentée par M. le Conſeiller de Collèges Pallas.

Le 20 Janvier. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, la premiere partie du magnifique ouvrage botanique annoncé en 1782 (*) & publié ſous le titre: *Flora Roſſica, ſeu ſtirpium Imperii Roſſici per Europam & Aſiam indigenarum deſcriptiones & icones*, gr. in fol.

Le Secrétaire perpétuel de Conférences, M. Jean-Albert Euler a lu une lettre de M. Rulffs datée d'Einbeck le 23 Décembre 1784, qui envoie des brochures publiées à l'occaſion de ſon mémoire ſur les maiſons de correction, approuvé par la Société Royale des Sciences de Göttingue & préſenté à l'Académie le 9 Sept. de l'année derniere (**).

Ex

(*) Acta Acad. Imp. Sc. Petrop. ad An. 1782. Pars poſterior, pag. 9.
(**) Hiſtoire de l'Académie pour 1784, pag. 33.

Le même 20 Janvier. Le Secrétaire a remis un mémoire manuſcript latin: *Diſſertatio de parallelis*, préſenté par un étudiant nommé Elkana, qui ſollicite une place de Mathématicien à l'Académie. Cet écrit qui ne contient rien qui ſoit digne de l'attention des Académiciens, a été rendu à l'auteur.

Le 27 Janvier. M. le Conſeiller de Colléges Pallas a envoyé pour être préſenté à l'Académie, un mémoire manuſcript de M. le Docteur J. H. Roudolph, ſur la congélation du mercure, où ſont rapportées des expériences que l'auteur prétend avoir faites à Jena pendant un froid naturel de $32\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur: ce qui diſpenſa Mrs. les Académiciens d'en dire leur ſentiment.

Le 31 Janvier. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être expoſé à l'aſſemblée, communiqué au département géographique, & pour être examinée la nouvelle carte générale de l'empire de Ruſſie, publiée par ordre de S. E. Mr. le Procureur Général Prince de Vaiſemski, & gravée d'après le deſſin de M. le Major Pétin.

Le 14 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre, pour être préſenté de la part des éditeurs & dépoſé enſuite à la Bibliotheque:

Annales of Agriculture and other uſeful arts collected and published by Arthur Young Esqr. vol. I. in 8vo.

Opere di Nicolo Machiavelli Tom. I. II. III. IV. V. & VI. in 4to.

ce dernier ouvrage étoit accompagné d'une lettre italienne de l'éditeur, datée de Florence le 12 Juillet 1783 & ſignée Réginald Tanzini.

Le

Le 17 Février. Madame la Princeſſe a envoyé pour être préſenté de la part de l'auteur: Nouvelles expériences pour ſervir à déterminer le vrai point de congélation du Mercure & de la différence que le degré de pureté de ce métal pourroit y apporter: par M. Guthrie Conſ. de Cour & Médécin du Corps noble des Cadets de terre.

Le 24 Février. Madame la Princeſſe a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice cinq petites monnoyes d'argent, trouvées dans le Gouvernement de Pleskow, avec une explication ſignée par M. le Conſ. de Collèges Pallas.

Le Secrétaire a lu avec la permiſſion de S. E. Madame le Princeſſe de Daſchkaw: *Memoire über die neue Claſſe von Edelſteinen, wovon vor drey Jahren nur eine vorläufige Ankündigung bey der Erlauchten Akademie der Wiſſenſchaften zu St. Petersburg verſiegelt deponirte Ernſt Chriſtoph Schultz.* (*). L'auteur en demandant à Madame la Princeſſe cette permiſſion que ſon mémoire ſoit lu à l'Académie, prie Son Excellence, dans une lettre datée de Hambourg le 16 Février, que ſon dépot envoyé en 1781 ne ſoit pas encore decacheté, à fin qu'il puiſſe ſervir quelque jour de document pour conſtater la dâte de la decouverte qu'il a faite d'une nouvelle claſſe de pierres précieuſes, & qu'il annonce enfin être l'Aſtérie de Pline.

Le 10 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. A. Msgr. le Prince de Potemkin, pour être conſervé au cabinet de curioſités, deux anneaux d'or trouvés ſous

(*) Hiſtoire de l'Académie Anne 1781. Partie 1, pag. 54.

terre, aux environs de Bachmouth, qui ſemblent avoir ſervi de boucles d'oreilles ou d'attaches de vêtement.

Le 14 Mars. Madame la Princeſſe a envoyé pour le cabinet d'hiſtoire naturelle ſix flacons avec des animaux conſervés dans de l'eſprit de vin, & un poiſſon ſeché, qu'elle a détaché de ſa propre collection, ayant été informée que ces pieces manquoient à l'Académie.

M. le Conſ. de Cour Kotelnikof a expoſé un monſtre humain, conſervé dans de l'eſprit de vin & envoyé à l'Académie par le Gouvernement de Smolensk: ce ſont deux enfans jumeaux réunis par le *Sternum* & les machoires, n'ayant qu'une ſeule bouche.

Le 21 Mars. M. le Conſ. de Cour Lepechin a lu une lettre addreſſée à l'Académie par M. le Conſ. de Collèges Ladigin, datée de Kritſchef le 8 Mars, qui envoie divers échantillons d'un ſel alkali raffiné, qu'il a préparé du rebut qu'on rejette dans les ſavonneries, & qui devient cependant d'une grande utilité aux artiſtes qui travaillent en métaux. M. Ladigin déſire que l'Académie après avoir fait examiner ſa découverte, la rende publique, offrant de communiquer par écrit la maniere de préparer ce ſel en grande quantité. M. l'Académicien Géorgi ayant été chargé de cet examen, il en a fait un rapport très avantageux. Voyez ſon mémoire inſéré au 1er Tome de ces nouveaux Actes pag. 323.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une lettre que lui a adreſſée S. E. Mr. le comte Tſchernifchef, qui lui communique le jugement favorable que l'Amirauté a porté du cercle à réflexion, inventé par M. de Magellan à Londres & préſen-

préſenté à l'Académie le 10 Octobre 1783. Voyez l'hiſtoire de l'Académie pour cette année: pag. 26 & 141.

Le même 21 Mars. S. E. Msgr. l'ambaſſadeur de la cour Impériale & Royale, comte de Cobenzl', a envoyé pour être communiqué à l'Académie, le Programme d'un prix propoſé par un anonyme, concernant une queſtion de Jurisprudence.

Le 28 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé trois vaſes étrusques, dont Sa Majeſté l'Impératrice a fait préſent à l'Académie, pour être dépoſés à ſon cabinet de curioſités.

Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie par M. le Conſ. de Cour Gerngroſs, Préſident du Magiſtrat de Pleskow, qui envoye diverſes pierres & terres des environs de cette ville, priant l'Académie de les faire examiner, pour ſavoir ce qu'ils contiennent & à quel uſage on pourroit les employer? L'Académie en a chargé M. le Prof. Géorgi, qui en a fait ſon rapport à la ſéance ſuivante.

Le 31 Mars. M. le Conſ. de Cour Ozeretskofski a communiqué une rélation du tremblement de terre qui a été reſſenti à Mosdoc le 12 Février: elle a été inſerée dans les gazettes.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a lu des lettres de M. Patrin, datées d'Irkoutz, & de M. Jährig, datées de Gouſinoi-ozero prés du lac Baikal. Le premier communique diverſes nouvelles intéréſſantes & envoie des ſemences pour le jardin botanique. L'autre communique l'esquiſſe d'une hiſtoire des nations établies dans le Gouvernement d'Irkoutzk', à la quelle

il va travailler par ordre du Gouvernement, & envoie une carte topographique des contrées entre les frontieres de la Chine & le lac Baikal, ſur laquelle il a indiqué la nouvelle route qu'il a découverte pour aller commodément de Kiachta au lac Baikal: cette route eſt beaucoup plus courte que l'ordinaire, & même presqu'en droite ligne à l'embouchure de l'Angare.

Le 4 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part du corps Impérial des nobles Cadets de Marine, le Dictionnaire anglois & ruſſe, que cet inſtitut a fait imprimer à l'uſage de ſes éléves.

Le 11 Avril. M. le Conſ. de Cour Lepechin a rapporté, avoir reçu de M. le Conſ. de Cour Laxmann une caiſſe de diverſes racines, qu'il a plantées au jardin botanique.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Lalande datée de Paris le 27 Mars, qui communique les obſervations de la nouvelle comète, découverte par M. Méchain dans la conſtellation d'Andromède.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis de la part de M. le comte de Harſch, chambellan de S. M. Impériale & Royale, des obſervations ſur pluſieurs météores, qui ont parus dans l'atmoſphère dans le temps qu'il ſe trouvoit en Ruſſie Blanche, ſur les domaines de S. A. Msgr. le Feld-Marechal Prince de Potemkin, avec quatre deſſins colorés.

Le 28 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une collection de cryſtaux du Caucaſe, dont elle a fait préſent au cabinet académique.

Le

Le 2 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſé au cabinet académique, quinze monnoyes antiques trouvées au Gouvernement de Pleskow, avec une explication de M. le Conſeiller de Collèges Pallas.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſ. de Cour Laxmann datée de Talzinsk près d'Irkoutzk', le 22 Février, qui envoie avec un catalogue, pluſieurs productions marines ainſi qu'un Muſaraigne, dont la déſcription ſe trouve inſérée au préſent volume pag. 285.

Le 5 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſé au médailler académique, deux médailles frappées en mémoire du feu Aide-de-Camp-Général Lanskoi, l'une en or & l'autre en argent.

Le 12 Mai. M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de M. le Brigadier, Chevalier Brekling, un extrait des obſervations météorologiques, que ce militaire, amateur de la Phyſique, a faites en diverſes villes de la Ruſſie, pendant les années 1772 — 1778, & dont il promet d'envoyer la continuation.

Le 16 Mai. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur, M. le Commiſſaire Rulffs à Einbeck, un volume in 8vo contenant 1.) *Verſuch zur Beantwortung der Frage: wie ſind Waiſenhäuſer anzulegen?* 2.) *Ueber die Preiſsfrage: von der vortheilhafteſten Einrichtung der Werck- und Zuchthäuſer: zwote vermehrte Auflage.*

Le Secrétaire a préſenté une lettre addreſſée à l'Académie par le S^r^. Fantet, qui envoie un plan & un mémoire con-

concernant la conſtruction d'un nouveau fourneau pour la formation des ſels. Cet écrit n'a mérité aucune attention.

Le 23 Mai. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis, de la part de S. E. Mr. le comte Grégoire de Razoumofski, le 1er tome des mémoires de la Société des Sciences Phyſiques, établie à Lauſanne en Suiſſe. Année 1783.

Il a lu une lettre de M. Jährig, datée du 28 Février, qui envoie le commencement de ſon hiſtoire des nations de l'Aſie ſeptentrionale, dont il a été chargé par le Gouvernement. Enſuite une lettre très intéreſſante de M. Raſpe, ſur l'analyſe chymique de quelques minéraux remarquables: cette lettre eſt datée d'Entral près de Mamborn en Cornwallis, le 5 Mars.

Le 26 Mai. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur, M. Giovanni Vivenzio, chevalier de l'ordre Royal & militaire de S^t^. Conſtantin & premier Médecin du Roi de Naples: 1.) *Theoria e Pratica dell' Elettricita medica del Signor Tiberio Cavallo e della forza dell' Elettricita nella cura della ſuppreſſione de menſtrue del Chirurgo Giovanni Birch, tradotte di G. Vivenzio* &c. avec des remarques du Traducteur & précédée de l'hiſtoire de l'électricité médicale. 2.) *Iſtoria & Theoria de' Tremuoti in generale & in particulare di quelli della Calabria e di Meſſina de* 1783. M. Krafft ayant été chargé d'examiner ces deux ouvrages, il en a fait un rapport très favorable à une des ſéances ſuivantes; qui a été ſuivi de la reception de cet auteur, au nombre des aſſociés externes.

Le

Le même 26 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 10 Mai, qui fait mention de la nouvelle invention de M. Moore, pour diminuer & rendre presque insensibles, les douleurs dans les amputations, & qui communique les nouvelles expériences de M. Priestley sur l'existence du phlogistique.

Le 30 Mai. M. le Conseiller de Collèges Pallas a distribué son avis au Public, concernant l'édition d'un Vocabulaire polyglotte, dont il est chargé par Sa Majesté l'Impératrice, qui en a fait Elle même le recueil.

—— —— il a lu une lettre de M. de Born, datée de Vienne le 16 Mai, qui annonce sa nouvelle méthode de séparer l'or, l'argent & même le cuivre, des minérais qui en contiennent, par une amalgamation beaucoup plus avantageuse rélativement au temps & à la dépense, que ne l'est l'ordinaire.

Le 6 Juin. M. le Cons. de Collèges Pallas a présenté de la part de l'auteur: *A general View of the writings of Linnaeus by Richard Pulteny M. D. London* 1781.

Le même a remis un avis aux médecins & botanistes, concernant l'impression de l'ouvrage de M. Allioni intitulé: *Flora Pedemontana;* & encore un prospectus de l'ouvrage de M. l'Héritier à Paris: *Stirpes novae aut minus cognitae, descriptionibus et iconibus illustratae.*

Le Secrétaire a remis de la part de la commission des longitudes établie à l'amirauté de Londres:

Theoria Lunae iuxta systema Newtonianum, auctore Tob. Mayer Londini 1767. 4to.

New and correct Tables of the motions of the Sun and Moon, by Tobias Mayer. 4to.

Tables for correcting the apparent distance of the Moon and a Star, from the effects of Refraction and Parallax, published by order of the Commission of Longitude. Cambridge 1772. 4to.

A Sexcentenary Table by John Bernoulli, London 1779. 4to.

A Sexagesimal Table, by Michael Taylor, London 1780. 4to.

A Table of Products, Folio.

Tables requisite to be used with Nautical Ephemeris for finding the latitude and longitude at Sea, London 1781. 8vo.

The original astronomical observations made in the course of a voyage to the Northern Pacific Ocean for the discovery of a Nord-East or North-West passage, London 1782. 4to.

The Nautical Almanach for the Year 1787, 88, 89, 90, 8vo.

& de la part de Société royale des Sciences de Londres:
Philosophical Transactions Vol. LXXIV. for the Year 1784. Part II.

Le 13 Juin. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour le cabinet d'Histoire naturelle un *Ludus Helmontii*, ou pierre cloisonnée coupée par le milieu & polie, dont l'extérieur ressemble à une tortue. En même temps S. E. à fait annoncer, que Sa Majesté l'Impératrice vient d'acquerir pour

pour une ſomme de dix mille florins un magnifique miroir ardent de métal, dont Elle fait préſent à l'Académie.

Le 16 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hermann, datée de Cathérinbourg le 23 Mars, qui envoie & préſente à l'Académie: *kurtze Beſchreibung der Tobolskiſchen Stathalterſchaft*, en manuſcript. L'Académie l'a fait traduire en ruſſe & inſérer au Calendrier Géographique de 1786.

—— —— il a lu une lettre du comte de Florida-bianca, premier Secrétaire d'État de S. M. Catholique, datée d'Aranjuez le 26 Mai, qui remercie l'Académie du préſent de ſes ouvrages, qu'elle a envoyés à la nouvelle Académie Royale des Sciences fondée à Madrit. Voyez le ſecond volume de ces nouveaux Actes: Hiſtoire de l'année 1784. pag. 8.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque:

The Hiſtory of the progreſs and termination of the Roman Republic, by Adam Ferguſon. Vol. I. II. III. London 1783. 4to.

A voyage to the Pacific Ocean, performed under the Direction of Capitains Cook, Clerke and Gore in thre volumes. The ſecond edition in 4to. Avec un volume de planches in gr. fol.

Le 23 Juin. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothèque: Исторія о странствіяхъ вообще. Часть IX по всѣмъ краямъ земнаго круга.

Le même 23 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre circulaire imprimée de M. le Profeſſeur Méderer à Fribourg en Brisgau, ſur l'éfficacité de ſon reméde contre l'hydrophobie, avec la méthode de s'en ſervir, & pluſieurs atteſtations qui certifient la guériſon entiere des perſonnes mordues par des chiens & des chats enragés. Cette lettre a été communiquée au College Impérial de Médecine.

Le 4 Juillet. Le Secrétaire a remis de la part de M. de Magellan de Londres: *Three regiſtres of a Poquet Chronometer and the obſervations from which they were collected, by count de Bruhl.* Et de la part de la Société Electorale de Météorologie à Mannheim: *Obſervationes meteorologicae anni* 1783, *in compendium redactae, a Carolo Koenig.*

—— —— il a lu une lettre adreſſée à Madame la Princeſſe de Daſchkaw par M. Pierre Camper, Aſſocié externe de l'Académie à Franecker en Friſe, qui y parle de ſes recherches actuelles ſur l'hiſtoire phyſique de la terre & ſur d'autres objets interéſſans & utiles à la ſociété, & qui finit par prier, que l'Académie lui envoie, pour pouvoir achever ces recherches importantes, divers oſſemens qu'on trouve dans le vaſte empire de Ruſſie en fouillant la terre, & dont il ſuppoſe que l'Académie poſſede pluſieurs doubles. Cette demande lui a été accordée.

—— —— il a remis de la part de M. le Conſeiller Privé Formey de Berlin, le nouveau programme des Prix propoſés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Pruſſe pour l'année 1787.

—— —— il a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée de Talzinsk' le 26 Avril, qui envoie pour le jar-

jardin académique diverſes ſemences cueillies dans les bois & les vallées entre Irkoutzk & le lac Baikal.

Le 7 Juillet. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque, deux portraits gravés du Prince d'Albanie, Etienne Hannibal.

Un adepte nommé Charles Guſtave Braun, a préſenté & ſoumis au jugement de l'Académie, un traité manuſcript ſur la pierre philoſophale. Mrs. Géorgi & Sokolof ayant été chargés de l'examiner, en ont fait leur rapport à la ſéance ſuivante, où ils diſent que l'écrit eſt indéchifrable, & que le peu de paſſages intelligibles qui s'y trouvent, ſont contraires à l'expérience. Ce traité a donc été rendu à l'auteur.

Le 18 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice: 1.) pour être dépoſé au médaillier académique, 78 diverſes monnoyes mahométanes avec un catalogue, que M. le Lieutenant Général Prince de Metſcherski a envoyées de Caſan: 2.) pour la Bibliothèque, un exemplaire du livre ſur l'adminiſtration des Gouvernemens, traduit en langue tartare, pour l'intelligence des habitans de la Crimée, imprimé à St. Pétersbourg.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Schultz, datée de Hambourg le 11 Juillet, qui communique ſon nouveau plan de prénumeration ſur ſept mémoires d'hiſtoire naturelle, & qui envoie pluſieurs exemplaires de ſon mémoire préliminaire ſur l'Aſtèrie de Pline, qui a été lu à l'Académie: (voyez ci-deſſus le 24 Février) ainſi qu'un échantillon de l'agathe blanchâtre à couleurs d'Iris, dont il avoit communiqué à l'Académie la déſcription en 1781.

Le 22 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé au cabinet d'Hiſtoire naturelle, quelques articulations du pavé des géants dans le comté d'Antrim en Irlande, dont elle a fait préſent à l'Académie.

Le Secrétaire a expoſé & remis de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris, le buſte de M. d'Alembert en plâtre, fait par M. le Comte en 1773. Ce préſent a été reçu avec remercimens & transporté à la Bibliotheque académique, dont il fait l'ornement.

Le même a préſenté

1.) de la part de la Société libre économique de St. Pétersbourg: Продолженiи трудовъ вольнаго Экономическаго общества часть V. 8vo.

2.) de la part de l'Académie Royale des Sciences de Berlin: *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Pruſſe, année* 1782, *avec l'Hiſtoire pour la même année.* 4to. & *Diſſertations ſur l'univerſalité de la langue françoiſe, qui ont partagé le Prix adjugé par l'Académie le* 3 *Juin* 1784. 4to.

3.) de la part de la Société royale des Sciences de Londres: *Philoſophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. LXXV. for the Year* 1785. *Pars I.* 4to.

4.) de la part de la Société électorale de Météorologie de Manheim: *Obſervationes meteorologicae anni* 1782. *in compendium redactae a Carolo Koenig. Manhemii* 4to.

5.) de la part des auteurs: I. *Oryctographia Carniolica: Oder Phyſicaliſche Erdbeſchreibung des Herzogthums Krain, Iſtrien und zum Theil der benachbarten Länder. I. II. III. Theil.* 4to. *Leipzig* 1784. dont le troiſieme volume eſt dédié à l'Académie. II. *Plantae Alpinae carniolicae. Collegit*

legit & deſcripſit Hacquet M. D. Viennae 1782. 4to. III. *Lettera adeporica del Signor Profeſſore Hacquet al Signore Cavaliere di Born.* 4to: avec une lettre de M. Hacquet datée de Lublana, le 1 Septembre 1784, & écrite en ſlavon avec la traduction françoiſe à coté. IV. *An experimental Inquiry in to the cauſe of the permanent colours of opake Bodies, by Edward Huſſey Delaval.* 8vo. *Warrington* 1785. V. *Lithophylacium Mitiſianum a Franciſco Güſsmann* 8vo. *Viennae* 1785, avec une lettre de l'auteur. VI. *Martini tractatus de Religionis neceſſitate ſumma in ſocietate ciuili.* 8vo. *Harderovici* 1785. Enfin

6.) de la part des éditeurs: *Johann Heinrich Lambert's deutſcher gelehrter Briefwechſel. Des fünften und lezten Bandes* 1ter *Theil.* 8vo. *Berlin* 1785: publié par M. Jean Bernoulli, Aſtronome Royal à Berlin. Et *Iſaaci Newtoni opera quae extant omnia, commentariis illuſtrata a Samuele Horsley.* 4to. *Tom. V. Londini* 1785.

Le 25 Août. Le Secrétaire a communiqué de la part d'un auteur anonyme: *Vuës patriotiques ſur l'établiſſement d'une Académie encyclopédique & populaire en Brétagne: par un Bréton.* 8vo.

Le 1 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, pour être préſenté de la part des héritiers du feu Conſeiller d'Etat actuel de Stèhlin, un ouvrage manuſcript du defunt Académicien, intitulé: *Hiſtoire littéraire de la vie de Pierre le Grand en Médailles*: медали на знатнѣйшїя приключенїя геройской жизни и достохвальнаго Государствованїя Петра великаго Императора. Cet ouvrage a été reçu avec reconnoiſſance & déposé à la Bibliotheque.

Le

Le même 1 Septembre. M. l'Adjoint Gollovin a préſenté de la part de l'auteur, M. Kriſtinin, Citoyen d'Archangel: Историческiи опытъ о сельскомъ старинномъ Домостроительствѣ Двинскаго народа въ Сѣверѣ. Ce manuſcript eſt une continuation de l'hiſtoire des anciens habitans d'Archangel du même auteur, imprimée, il y a quelques années, ſous l'approbation & aux depens de l'Académie.

Le 5 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être conſervé au cabinet d'Hiſtoire naturelle, une coralline noire d'Afrique, *Gorgonia* ou Lithophyte, d'une grandeur extraordinaire & d'un cru magnifique: & pour la Bibliotheque, un manuſcript réligieux ancien & très rare, écrit en latin ſur du vélin, avec des lettres gothiques façonnées & peintes en diverſes couleurs.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis par ordre de Sa Majeſté Impériale, la copie d'une inſcription antique, trouvée ſur un tombeau & envoyée par M. de Jacobi, Gouverneur-Général d'Irkoutzk, avec une explication & déſcription en langue ruſſe.

Le même Académicien a préſenté le proſpectus de la *Collection polygraphique ſur la Médecine, la Phyſique & l'Hiſtoire naturelle, par une Société de Médecins & Phyſiciens*: propoſée par ſouſcription, & devant paroître à Paris.

Le Secrétaire a remis pour la Bibliotheque, de la part de la Société établie à Amſterdam pour rappeller à la vie les noyés: *Hiſtoire & mémoires de la Société établie pour la conſervation des noyés.* Tom. III. Part. 2. 8vo. Et de la part de M. de Magellan: *An Ancount of the Foxglove and ſome of its*

its medical Uſes, by Will. Withering M. D. Birmingham 1785. 8vo. Enfin le Proſpectus de l'ouvrage hollandois: *Allgemeen Magazyn van Weetenſchap, Konſt en Smaak.*

Le 12 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris: 1.) *Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences avec les mémoires de Mathématique & de Phyſique Années* 1780 *&* 1781. 2.) *Connoiſſance des temps ou expoſition du mouvement des Aſtres pour l'Année* 1787. Et de la part des auteurs M. M. l'Abbé Rozier & Mongez le jeune: *Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts*: douze cahiers, Avril 1784 — Mars 1785 incluſivement.

—— —— il lut une lettre de M. le Conſeiller de Guerre Merk, datée de Darmſtadt le 1 Juillet, qui envoie un mémoire manuſcript *Sur les dents foſſiles de Rhinoceros, qui ſe trouvent en Allemagne & ſurtout ſur celles de l'eſpèce à deux cornes*: avec quatre planches gravées, dont deux repréſentent un ſquelette de la Giraffe nouvellement deſſiné, & une tête du *Crocodylus longiroſtris*, que M. Merk a trouvée parfaitement pétrifiée & presque entière dans un Géode de marbre d'Altorf. Enfin un exemplaire de deux lettres imprimées & adreſſées en 1782 & 1784, à M. le Conſeiller d'Etat actuel de Kruſe: *Sur les os foſſiles d'Eléphans & de Rhinoceros* qui ſe trouvent dans le païs de Heſſe-Darmſtadt.

Le 19 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la veuve du Conſeiller d'Etat actuel de Stèhlin, l'ouvrage que cet Académicien a fait imprimer en Allemagne peu de temps avant ſon décès: *Original Anecdoten von Peter dem Groſsen, aus dem Munde angeſehener Perſonen zu Moskau und Pe-*

tersburg vernommen, und der Vergeſſenheit entriſſen von Jacob von Stählin. 8vo. *Leipzig* 1785.

Le 29 September. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm: *Kongl. Vetenſkaps Academiens nya Handlingar Tom. V. för År* 1784. *Part.* 1. 2. 3. 4. *Tom. VI. för År* 1785. *Part.* 1. 2. & *Noua acta Regiae Societatis ſcientiarum Upſalienſis. Vol. IV.*

& de la part de l'Auteur: *Pauli Friſii Operum Tom. I. Algebram et Geometriam analyticam continens.*

Le 3 Octobre. Le Secrétaire a lu deux lettres de M. l'abbé Soulavie adreſſées à Madame la Princeſſe de Daſchkaw & à lui, & datées de Paris le 17 Mars, qui envoie ſon ouvrage ſur l'hiſtoire naturelle de la France méridionale en huit volumes, in 8vo.

Le 13 Octobre. M. le Conſeiller de Cour Kotelnikof a expoſé un foetus humain ſans crâne, que M. le Conſeiller de Collèges Pouzyrefski lui a envoyé pour le cabinet académique. Cette piece a été trouvée mériter une place parmi la belle collection de monſtres que poſſede l'Académie.

Le 24 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. van Marum, Docteur en Médecine & Directeur du cabinet d'hiſtoire naturelle de la Société Hollandoiſe des Sciences à Harlem, datée du 30 Juin, qui envoie le premier volume du bel ouvrage intitulé: *Déſcription d'une très grande machine électrique placée dans le Muſeum de Teyler à Harlem, & des expériments faits par le moyen de cette machine*: imprimée en hollandois & en françois. 4to.

Le

Le même 24 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', datée de Moscou le 13 Octobre, qui envoie une caiſſe contenant les foſſiles & ſemences qu'il avoit cueillies pour l'Académie, pendant ſon ſéjour en Crimée.

Le 31 Octobre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. l'abbé Rochon, qui à été reçu au nombre des Aſſociés externes le 13 Juin.

Le 3 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être préſenté à l'Académie, de la part de M. Bugge, Conſeiller de Juſtice & Aſtronome Royal à Copenhague: un *Atlas de Dannemarc*, contenant ſept cartes ſavoir une générale & ſix particulieres. Enſuite *Obſeruationes aſtronomicae annis* 1781. 82. *&* 83. *inſtitutae in obſeruatorio regio Hauniensi, & cum tabulis aſtronomicis comparatae. Auctore Thoma Bugge. Hauniae* 1784. *in* 4to.

Le 7 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie, par M. le Conſeiller de Mines Müller à Halle en Saxe, qui envoie le proſpectus de deux ouvrages périodique de Medecine & de Chirurgie.

Le 14 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de Son Exellence Madame la Princeſſe de Daſchkaw, pour être dépoſé au cabinet d'hiſtoire naturelle, un cryſtal d'alun d'une grandeur extraordinaire & très parfaitement figuré, qu'elle venoit de recevoir de l'Angleterre, & dont elle a fait préſent à l'Académie.

—— —— il a lu une lettre adreſſée à Mrs. de l'Académie, par M. Janin de Combe-Blanche, Chirurgien Oculiſte & Membre du Collège Royal de Chirurgie de la ville de Lyon, da-

tée du 26 Juillet, qui envoie: *Mémoires & observations anatomiques, physiologiques, & physiques sur l'oeil & sur les maladies qui affectent cet organe. Paris* 1782. un volume in 8vo, avec onze petites brochures sur les antiméphitiques & le magnétisme animal.

Le 17 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Bode Astronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse, qui communique à l'Académie les observations des satellites de Jupiter qui sont parvenues à sa connoissance, pour pouvoir les comparer avec les correspondantes, qui ont été faites en divers endroits de la Russie par Mrs. Inohodzof & Tschernoi.

Le 1 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliothéque de l'Académie, un exemplaire de la déscription physique du territoire de la Tauride par M. le Conseiller de Cour Hablitzl', imprimée en russe, *gr. in folio* & intitulée: Физическое описаніе Таврической области.

M. le Conseiller de Colleges & Chevalier Pallas a communiqué des lettres de M. Jährig, & remis de sa part les herbes & graines qu'il en avoit nouvellement reçu.

Le 5 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conseiller de Cour Hermann, datée de Cathérinbourg le 4 Novembre, qui envoie en manuscript: *Nachricht von der Ausbeute der Bergwerke im russischen Reiche.*

Le 15 Décembre. Madame la Princesse a envoyé pour le cabinet d'histoire naturelle, plusieurs coquilles, coraux, plantes & insectes marines, qu'elle venoit de recevoir du Gouvernement d'Archangel, & dont elle a fait présent à l'Académie.

Le

Le Secrétaire a lu deux lettres de M. de Magellan, datées de Londres le 9 Septembre & 18 Novembre, qui communique diverſes nouvelles littéraires & qui envoie de la part de la Société Royale des Sciences: *Philoſophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXXV. of the Year* 1785. *Part. II.*

M. le Profeſſeur Ferber a remis le proſpectus d'un ouvrage, que M. le Profeſſeur Norberg promet de publier par la voie de la Souscription: c'eſt ſon *Opus Syriaco-Hexaplare.* L'Académie y a ſouſcrit.

Le 27 Décembre. Aſſemblée ſolemnelle tenue pour célébrer la 60me annivérſaire de la fondation de l'Académie, & pour adjuger le Prix de minéralogie, propoſé en 1783. Voyez en le recit ci-deſſus pag. 7.

Le Secrétaire a continué de préſenter, les obſervations météorologiques faites à Moscou & à Berlin, & communiquées à l'Académie, les premieres par M. le Conſeiller de Cour & Chevalier Stritter, & les dernieres par M. l'Académicien Beguelin.

Déſcription de douze monnoyes aſiatiques d'argent, d'une antiquité très reculée, envoyées au médailler académique, de la part de Sa Majeſté L'Impératrice.

par
Mr. *P. S. PALLAS.*

Communiquée à l'Académie le 17 Janvier. 1785.

Les monnoyes antiques trouvées dans le Gouvernement de Smolensk qui m'ont été confiées par ordre de Sa Majeſté Impériale, ſont proprement de deux eſpèces abſolument différentes. Les trois ornées de portraits & de figures, ſont certainement antérieures à Mahomet, & plus antiques que tout le reſte. Celles qui ne portent que de ſimples inſcriptions arabes appartiennent aux Califes du huitieme & neuvieme ſiecle de nôtre ére chrétienne. Je commencerai par celles-ci, parceque j'en ai une notion plus claire.

Toutes ces monnoyes cottées A, & numerotées au nombre de neuf, portent des deux cotés, tant ſur le diſque que par la circonférence, des inſcriptions arabes en caracteres kufiques. Ce caractere, que l'on trouve auſſi dans les épitaphes & inſcriptions anciennes, n'eſt plus employé aujourd'hui ni des arabes, ni des autres nations mahométanes. Il n'y a que peu de ſçavans parmi ces nations, & encore moins parmi nos litterateurs européens, qui ſoyent en état de le lire. Ce caractere étoit en uſage chez les Arabes

rabes avant & pendant les premiers âges après Mahomet. Il dérive du caractere Caldéen & Syrien antique, connû des ſçavans ſous le nom d'Eſtranghelo. Le nom qu'on lui a donné, ſemble dériver de la ville de Kufa, ſituée ſur un bras de l'Euphrate, ſous 31 degr. 50 min. de latitude, & environ 69$^{d.}$ de longitude, dans l'Irak-Arabi, qui eſt l'ancienne Caldée. Les copies les plus anciennes & les plus éſtimées du Koran, ont été écrites dans cette ville du même caractere qui en a conſervé le nom.

Je dois obſerver, que beaucoup de ces monnoyes en argent, à inſcriptions kufiques, ont été trouvées dans différents pays, voiſins de la mer baltique, même jusqu'en Pruſſe & en Poméranie; ſoit que le commerce les ait répandu jusques là, ou que les Chevaliers Teutons ou autres, les euſſent rapporté des croiſades. Le célébre Kehr, trés-verſé dans la littérature orientale, en a décrit de tout ſemblables aux nôtres, qui furent trouvées dans le ſable des côtes baltiques prés de Dantzig; & le Profeſſeur Tychſen à Bützow a annoncé récemment de ſemblables découvertes, faites en Pomeranie.

Aucun des interprètes tatares au Collége des affaires étrangeres, n'a pû déchiffrer l'inſcription kufique des monnoyes en queſtion. Heureuſement j'ai trouvé un Moullah tatare qui, à l'aide d'un alphabet Syro-Caldéen, m'a aſſiſté à lire & à traduire le plus eſſentiel de ces inſcriptions. Celles du milieu ne conſiſtent qu'en formules ſacrées, analogues à la croyance mahometane, & il ſuffira de donner pour échantillon les deux qui ſe trouvent répétées ſur cinq d'entre les neuf monnoyes.

On

On lit ſur l'un des cotés de la médaille A. N°. 1. cette formule arabe:

Allah - ahhad — Allah iſſamat — Läm - ŷaelit
Dieu (eſt) un — Dieu (eſt) éternel — pas n'engendre
Welem - youlat — Welem yakun - lahu - koyen — ahhadon.
ni n'eſt-engendré — ni n'exiſte-t-il-à lui-ſemblable — aucun.

De l'autre coté on lit ſur le milieu du disque:

Mohammadon - raſſoulo - Uahi —
Mahomet (eſt) prophéte (de) Dieu —
arſſalahò - byll - hoda - wadini - l'hakki —
(qui) l'a envoyé avec voye & réligion vraye —
leyodh' - ſherahò - alla — dini - kolléhi —
pour illuſtre (la) rendre — au deſſus de toute réligion
valao - kyrehà - l'moſchrekouna.
quoiqu'en reculent les idolâtres.

La circonférence de cette médaille porte, qu'elle a été frappée au nom de Dieu dans la ville de Khomis, ou Phomis, (incertitude occaſionnée par le defaut de ponctuation dans le caractere kufique,) l'année 7065, qui doit apparemment dater de la création du monde, ſelon l'éſtime des Arabes.

La monnoye N°. 2. A. porte préciſement les mêmes formules ſur le disque; & la circonférence annonce qu'elle a été frappée l'an 160 Hégire, qui revient à peu près à l'an 776 de nôtre ére chrétienne, dans la ville de Damask.

Sur le N°. 3. A. où les formules ſont exactement les mêmes, l'inſcription en cercle porte l'année 68 de Hégire, ce

ce qui annonce une antiquité ſupérieure à toutes les autres. Le nom de la ville, où cette monnoye fut frappée, eſt énoncé Sannôuà.

Sur les N°. 4 & 5 A. qui ſont d'une grandeur différente, les formules du disque ſont encore les mêmes. L'année marquée ſur la plus grande de ces monnoyes eſt la 111. de Hégire, ou 737 de nôtre ére; & ſur la petite 123 de Hégire; pour toutes les deux, le nom de la ville eſt Oûaſtha, ou Waſſetha, qui eſt ſituée dans l'Irac-Arabi, ſur les deux bords du Tygre, ſous 32 degrés 20 min. de latitude, à une diſtance à peu près égale, entre Baſſora, Bagdad, Kufa & Ahwas, d'ou ſon nom, qui ſignifie ville du milieu, peut avoir tiré ſon origine.

Le N°. 6. A. ne différe des précédentes, que par la mauvaiſe expreſſion des caracteres, & par l'année 167 de Hégire.

Les trois monnoyes N°. 7. 8 & 9. A. ſont toutes de la même ville d'Oûaſtha & d'années peu éloignées. Mais l'inſcription du milieu y eſt différente des ſix premieres, & contient plus en abrégé, des ſentences à peu près analogues ſur Dieu & Mahomet, qu'il ſeroit ſuperflû de répéter tout au long. Sur aucune de toutes ces neuf monnoyes arabes, aucun nom de Caliſe ne ſe trouve énoncé.

Je paſſe aux trois monnoyes cottées B, qui ſont totalement différentes des neuf premieres & d'une antiquité plus réculée. Elles ont aſſez de rapports entr'elles pour décider de leur origine commune, mais toutes mes perquiſitions juſqu'ici n'ont encore pû me conduire à aucun degré de certitude ſur cette origine. Le coſtume des portraits, qui ſur toutes ſont ornés d'une mitre royale ſurmontée de deux ailes, ou d'un

panache partagé, approche de l'ancien coſtume Perſan, & les caracteres de l'inſcription ont un rapport marqué avec le Zend ou ancien Perſan. Mais il m'a été impoſſible de rien déchifrer d'intelligible, même à l'aide du ſusdit alphabet, & perſonne des Arméniens & Tatares que j'ai conſultés ici, n'a pû y lire la moindre choſe.

Sur une de ces monnoyes, qui ſemble la plus ancienne, le portrait eſt ſans barbe & le mître à quelqu'apparence d'un casque, ſur lequel on voit, entre les deux ailes, un globe ſoutenû d'un demi-cercle. Des épaules s'élevent deux cordons tortillés, terminés par une houpe. Les caracteres du bord ſont un peu différens & presque ſemblables à ceux qu'on trouve ſur des monnoyes Puniques. Le revers montre très diſtinctement une colonne au milieu, ſurmontée d'une pointe conique. Mais aux deux cotés de cette colonne ſe trouvent des corps très-informes, qu'on ne ſauroit bien comparer à aucune figure connue, excepté peut-être à des carquois.

Sur les deux autres, la tête du portrait eſt barbue & la mitre ſurmontée, entre les deux ailes, d'une demi-lune avec un point. La demi-lune ſe trouve encore trois fois répétée ſur les bords avec une étoile; & il eſt remarquable, que ſur la plus antique de ces monnoyes, ainſi que ſur l'une des deux dernieres, la demi-lune & l'étoile ſe trouvent auſſi fort bien marquées ſur le revers, aux cotés de la pointe de la colonne. Mais cette colonne eſt moins diſtincte ſur les dernieres, & les deux figures qui l'accompagnent, ont quelque reſſemblance avec des hommes debout & en longues robes. Les revers ont auſſi les bords marqués de demi-lunes & d'étoiles.

Parmi

Parmi les caracteres de ces trois monnoyes, on n'a pu débrouiller que ceux, qui ſe voyent ſur le bord de la plus petite, du coté du portrait *ion*, lesquels par leur reſſemblance aux caracteres numériques des Arabes, pourroient ſignifier le nombre 1521. Mais comment concilier ce nombre avec aucune des éres reçues chez les orientaux, qui comptent ou depuis la création du monde, ou depuis Abraham, ou enfin depuis Mahomet? Je dois à l'égard de ces trois monnoyes avouer mon ignorance, jusqu'à ce que le hazard m'en fourniſſe la comparaiſon, ou bien l'explication.

Déſcription de cinq petites monnoyes d'argent, trouvées dans le Gouvernement de Pleskow, & remiſes par ordre de Sa Majesté L'Impératrice au médailler académique, le 24 Février 1785.

Ces médailles trouvées dans le Gouvernement de Pſkow ou de Pleskow, ſont européennes, & dâtent des temps gothiques après Charlemagne. Elles ſont en partie de l'eſpéce, qu'on appelle Bractéates, & leurs inſcriptions ſont en partie illiſibles. Une des mieux prononcées eſt le N°. 1, qui repréſente d'un coté une tête en face, couronnée & barbue avec l'inſcription:

CHVONRADVS IMP.

ou Conrad Empereur. Le révers montre ſur les bords quatre demi-cercles, contenant de petits viſages imparfaits, & l'inſcription au milieu:

B
V
+DIVS
R
G

N°. 2. repréſente une tête en profil, avec une couronne dentelée & un ſceptre devant ſoi. L'inſcription contient M. PICVS. T. I. Seroit-ce le tête d'un des Picus ſeigneurs de Mirandola? Sur le revers, on lit au bord: STAV. TRVR. & au milieu BRVT.

N°. 3. Bractéate qui porte d'un coté, une tête couronnée, en face & barbue; l'inſcription fort mal exprimée, ne laiſſe diſtinguer que ces lettres I I A M. Sur le revers, une tête de Sainte entourée d'un cercle au lieu de gloire: l'inſcription O T H A ou bien V T H A.

N°. 4. Une figure groſſiere, compoſée de points detachés, & repréſentant un homme à mi-corps, tenant de ſa gauche une eſpèce de ſceptre ſurmonté d'une croix, de l'autre une croſſe épiſcopale; l'inſcription eſt tout à fait illiſible. Le revers repréſente au bas un écuſſon fendu perpendiculairement en trois champs: au deſſus on peut lire E C T I, & ſur le bord H. M. Le reſte eſt indéchifrable.

N°. 5. D'un coté: main formée avec des lignes rélévées, & dans le cercle qui la renferme, d'un coté C V. de l'autre T. Autour de ce cercle on diſtingue ſeulement b \ I T. Le revers eſt une roüe à croix, avec quatre points.

P. S. Pallas.

Expli-

Explication de quinze monnoyes antiques, trouvées au Gouvernement de Pleskow & envoyées par ordre de Sa Majeste L'Imperatrice, au cabinet académique, le 2 Mai 1785.

Les dernieres quinze médailles qui m'ont été remiſes par ordre de Sa Majeſté Impériale ſont, comme les précédentes, du neuvieme ou dixieme ſiecle, & appartiennent en partie à des Rois de Suede, ou à des Éveques & à des villes. Sans prétendre vouloir les éclaircir par l'hiſtoire, je me borne à en donner ici la déſcription & ce que j'ai trouvé liſible de leurs inſcriptions latines:

N°. 1. Médaillon de tête mal caracteriſée, avec un ſceptre & l'inſcription: ANΓLOMENTA.

Au revers: la croix ordinaire ſur les monnoyes de Suêde de ce temps, avec l'inſcription:

OLOF. RX. EVINAHM.

N°. 2. Médaillon de tête ſemblable, avec cette inſcription:

HERIECVS. EX.

Au revers on lit en trois partitions VƆƆV / BRVN / ƆOOD Brundoc-cuſſa.

N°. 3. Tête couronnée avec un ſceptre ſurmonté d'une croix, & la même inſcription: HENRICVS REX. Au revers les mots de la monnoye précedente avec quelques changemens ƆƆOD / BRVN / AƆƆV Brundoc-cuſſa.

N°. 4. Tête couronnée avec cette inſcription:
MEVVEMON.

Au revers, la croix avec des lettres arrangées entre les branches de cette croix qui forment cet enſemble ✕ AHTHON.

N°. 5. Une eſpèce de chapelle avec cette épigraphe:
SANCTA COLONIA.

Au revers, la croix avec des lettres rangées entre ſes branches, que l'on pourroit lire comme PILICRIN. La circonférence ſemble porter
CHVONRADVS IMP.

N°. 6. Une tête barbue; de l'inſcription il ne reſte que les lettres —INRI—

Le revers repréſente une porte entre deux tourelles, ſurmontée d'une croix; l'épigraphe eſt tout à fait illiſible.

N°. 7. Une inſcription en lettres inégales, dont les grandes, avec le ſigne millenaire ⊖, qui ſe trouve au deſſus, ſemblent indiquer l'année. L'inſcription eſt
coLoNII
A.

Le revers porte la croix & ces mots:
ODTO & MKVN.

N°. 8.

N°. 8. Figure à demicorps, qui tient de la droite une croſſe épiſcopale, & une croix de la gauche; l'inſcription eſt ponctuée :

SCS. MART. INVS. COV.

Au revers, ſur le milieu S⊐RAIECTVM, une eſpéce d'écuſſon au bas, & ſur la circonférence :

DERNOLPVS EPISCOP.

N°. 9. Figure ſemblable à la précedente, mais les inſcriptions me ſont indéchifrables.

N°. 10. Un viſage, autour duquel il ne reſte que ces lettres liſibles ALBE—

Sur le revers, une roſe & autour —NANT+

N°. 11. Une tête barbue en face, ſemblable à un Ecce-homo; ſur le contour +HEIN—

Au revers, une repréſentation de moulin à bateau, & l'inſcription quoique un peu éffacée :

VRBS HOSVM.

N°. 12. Une tête en face, ſemblable au N°. 11. ſans lettres apparentes.

Au revers, la meme figure, avec une inſcription totalement effacée.

N°. 13. Figure informe, tenant une croix; l'inſcription du contour S—ΛΓERTVS.

Au

Au revers, une croix avec trois ſegments de cercle, & ſur le contour BRCI=LAVS. DVX.

N°. 14. Un portique, ſous lequel on voit les deux lettres A M, une croix en ſautoir, & l'inſcription

+THA-NAR.

Au revers la croix, avec des fleurs de lys entre ſes branches & l'inſcription en partie éffacée

— CVS DENTO.

N°. 15. Monnoye dont le travail ſemble d'une antiquité plus réculée que les autres. D'un coté une tête en face, dont l'inſcription eſt éffacée. Au revers quatre demicercles appuyés ſur les bords, entre les-

V

quels on lit ces lettres +DIV=.

R

P. S. Pallas.

Extrait

Extrait
d'une lettre de M. Patrin, à M. le Conſeiller de Collèges Pallas, datée d'Irkoutzk le 1er Janvier 1785.

Vous connoiſſez fort bien ce minérai ferrugineux, qui ſert de matrice aux ſchörls verds, ou ſi vous voulez, à ces mauvaiſes émeraudes qui ſe trouvent mélées & confondues avec du fluſs-ſpath verd, des cryſtaux de montagne noirs, & des topaſes: eh bien, ce minérai de fer eſt riche en or, ſurtout celui qui eſt ſous la forme de mine ſpéculaire, dont une partie eſt en lames irrégulieres, & une partie diſpoſées en pyramides applaties: on ne m'a point encore inſtruit de la proportion du métal précieux. J'avois ici un petit échantillon de ce minérai, je l'ai cédé à M. Karamyſchef, pour le mettre à la ſauce qu'il jugera à propos: peut-être qu'il vous en rendra compte. Au reſte, le minérai dont je parle, vient d'une montagne nommée par les Toungouſes Одинъ-челону (*Odin ſchelonu*), ſituée entre les rivieres Ононъ-борза (*Onon-borſa*), & Typra (*Turga*), dont le filon contient outre ce minérai ferrugineux, 1°. de mauvaiſes topaſes blanchâtres, cryſtalliſées en prismes tétragones comprimés à leurs extrémités en forme de coin, plus ou moins régulierement; 2°. de cryſtaux de roches noirâtres, terminées comme à l'ordinaire par une pyramide hexagone; 3°. de ſchörls verds toujours hexagones & très régulierement cryſtalliſés, d'un diamètre parfaitement égal dans toute leur longueur, qui eſt quelquefois de 7 à 8 pouces ſur un diamètre de plus d'un pouce. Les deux extrémités de ces cryſtaux ſont pour l'ordinaire tronquées, exactement planées & polies; cependant j'ai vu dans une collection qui a été envoyée ici,

ici, un de ces cryſtaux d'environ 8 lignes de diamètre ſur 5 à 6 pouces de longueur, qui avoit un accident qui m'a paru très remarquable; c'eſt qu'une de ſes extrémités, au lieu d'être plane, étoit relevée d'une proéminence entiérement ſemblable à l'articulation des grandes colonnes de baſalte ordinaire; & cela me paroit confirmer la dénomination, qui leur a été donnée de ſchörls, puisque les ſchörls ne ſont que des baſaltes en miniature. Au ſurplus, ces cryſtalliſations vertes ſe trouvent quelquefois enclavées tout au travers des cryſtaux noirs, ſans que ni la couleur, ni la cryſtalliſation des uns ni des autres en ſoit altérée, & ſans qu'il y ait le moindre mélange, ce qui eſt fort ſingulier; car on voit clairement, qu'il y a une pénétration mutuelle, & que les deux ſubſtances des cryſtaux verds & des cryſtaux noirs, ſe ſont trouvées en diſſolution dans le même temps, & qu'ils ſe ſont auſſi dans le même temps cryſtalliſées; la nature a formé par là de très beaux accidents, & l'on voit qu'elle ſongeoit à votre cabinet; car M. Laxmann aiant fait un long ſéjour dans le voiſinage de cette montagne, je ne doute pas que vous ne ſoyez abondamment pourvu de ces cryſtalliſations: pour moi je n'ai eu que le plaiſir de voir, & le chagrin de ne pas avoir celles dont je parle.

Par la lettre que vous écrivez à M. Karamyſchef & qu'il a bien voulu me communiquer, je vois qu'on a trouvé dans les ſteppes des Kirghiſes une riche mine d'éméraudes. Cette trouvaille vaut mieux que celle du Lapis Lazuli faite au Coultuc, dont l'origine n'eſt pas connue, & dont les morceaux qui j'ai vus, ont été roulés pendant quinze ſiecles.

Par la même lettre je vois, que vous déſirez des ſemences de la *Swerta corniculata* & du *Pyrus baccata*. Comme je m'en trouve quelque peu, que j'avois pris ſeulement pour échan-

échantillon, j'ai l'honneur de vous les envoier. Il n'y a plus ici de Яблочки (*des pommes*), on les a toutes mangées, mais dans quelques jours on en aportera de l'autre coté du Baïkal & nous pourrons vous en fournir une proviſion. En attendant vous trouverez dans la petite boete ici-jointe, un exemplaire frais de l'arbre en fleur, & 5 ou 6 autres plantes, entre autres ce *Delphinium* à petites fleurs blanches, qui me paroit très diſtinct du *Delphinium elatum*: j'y joins les graines, de même que d'un aſtragale à tige ligneuſe qui me paroit différent d'un autre aſtragale fruteſcent des environs de l'Ouba, que vous avez reçu, & avec lequel je ne puis le comparer n'aiant point ici mon herbier. Je n'ai même aucuns livres, attendu que je ne croiois demeurer ici que quelques ſemaines; & ceux de M. Karamyſchef ſont, à ce qu'il m'a dit, entaſſés dans des coffres. C'eſt pourquoi je vous ſupplie de me dire ce que c'eſt que cette labiée qu'on nommé ici мята (*Miäta*), & qui a une odeur de citron, laquelle ne me paroit pas une *Mentha*, mais une *Nepeta*: elle eſt fort commune aux environs d'Irkoutzk & de Nertſchinsk, mais je ne me rappelle pas de l'avoir vu autre part. Elle eſt remarquable par la diſpoſition de ſes épis, dont les fleurs ſont entiérement tournées d'un ſeul coté, l'autre coté n'offrant qu'une double ſérie de ſtipules.

Sur la Congélation du Mercure.

Dans une lettre d'Irkutzk du 18 Mai 1784. M. le Conſeiller de Cour Laxmann avoit rendu compte des obſervations, que l'Académie l'avoit chargé de faire en Sibérie ſur la congélation du mercure par le froid naturel. Il réſultoit de ces obſervations, qu'un froid de 32 degrés de Réaumur, qui en font 210 de Délisle, ſuffiſoit déja pour la congélation de ce fluide métallique, lors qu'il n'étoit pas plus purifié que de coûtume.

Les eſſais que Mrs. les Académiciens de St. Pétersbourg ont faits à ce ſujet, ont pleinement conſtaté ces obſervations. Le froid du vendredi 10 Janvier 1785 ſe trouvant à 22 d. de Réaumur, & ayant, par un mélange de neige & d'eſprit de nître, été augmenté jusqu'à 30, le mercure purifié par l'antimoine entra en congélation. Cette expérience détermine déja aſſés près le vrai point de la congélation du mercure, & ſert encore à donner une juſte idée du froid de la Sibérie: car puisqu'il conſte par le témoignage de pluſieurs perſonnes dignes de foi, que le mercure purifié s'y congele par le froid naturel, il s'enſuit qu'on n'a plus de raiſon de regarder comme impur le mercure auquel cela arrive, ni de ſe faire des idées exagérées du froid de la Sibérie. Cependant comme M. Laxmann croit dans la lettre ſusdite, pouvoir conclure d'après certaines obſervations, qu'en pouſſant la purification du mercure plus loin qu'elle n'a lieu ordinairement par l'antimoine, un froid beaucoup plus grand, ſupérieur même à tous ceux que la Sibérie éprouve, n'opéreroit plus la congélation ſusdite; tandis qu'au contraire des expériences faites à la baye de Hudſon, établiſſent avec une non moindre vraiſemblance, que le mercure le plus exactement purifié entre en congélation au

32 d. de Réaumur, Mrs. le Prof. Krafft & le Secrétaire ont refait au commencement de Février de cette même année 1785, diverſes nouvelles expériences dont nous allons donner le réſultat.

Le 2 Février matin, le froid naturel ayant été de 17 degrés, & ayant diminué pendant les expériences jusqu'au 15me d., Mrs. les Académiciens plongérent un thermomètre d'eſprit de vin rectifié, dans de petits vaſes remplis de mercure purifié de différentes manieres: ils enfoncérent enſuite ſucceſſivement ces vaſes dans des mélanges de neige & d'eſprit de nître fumant, où ils mirent encore ſéparément un thermomètre à mercure.

Le mercure revivifié du ſublimé corroſif ſe géla au moment que l'un & l'autre thermomètre indiqua un froid de 31 degrés de Réaumur.

Le mercure diſtillé du cinnabre entra déja en congélation, quand le thermomètre d'eſprit de vin n'étoit qu'au 29 degré. Dans l'autre thermomètre le mercure s'étoit précipité entiérement dans la boule.

Le mercure dépuré par ſoi-même commença à ſe géler, lorsque l'un & l'autre thermomètre parvint au 30me degré.

Le 15 Février matin, le froid naturel ayant été de 19½ degrés de Réaumur, ayant fait remplir des tuyaux de thermomètre de mêmes diverſes eſpéces de mercure, dont ils voulurent déterminer le point de congélation, nos Académiciens les plongerent immédiatement dans des mélanges de neige & d'eſprit de nître fumant.

Le thermomètre rempli du mercure dépuré par ſoi même s'arreta au 32 degré, mais le mercure ne ſe trouva pas encore entiérement gélé, quoique le diamètre du tuyeau fut très petit; ce qu'on pouvoit voir très diſtinctement par la bulle d'air qui montoit dans la boule en renverſant l'inſtrument. On le remit ſur cela dans un nouveau mélange, & le thermomètre qui étoit encore à 32 degré, ſe précipita dans un inſtant presqu'imperceptible, jusqu'au 46me degré, où le mercure ſe trouva entiérement gélé & ſolide.

On obſerva à peu près les mêmes phénomènes en employant les thermomètres remplis avec les autres eſpéces de mercure: tous s'arréterent d'abord au 30me degré, tantôt plus tantôt moins, ſans que pour cela le mercure dans la boule eut perdu ſa fluidité; mais il devint tout à fait ſolide en plogeant le même thermomètre dans un ſecond mélange, dans lequel le mercure tomba tantôt au 46 tantôt au 50me degré, ce qui prouve au moins qu'aucune des ſusdites eſpèces de mercure ne demande un froid plus violent que de 50 degrés de Reaumur, pour que ſa maſſe devienne entierement gélée; d'où les expériences de feu M. Braun ſont déja beaucoup rectifiées.

On voit au reſte par ces dernieres expériences que le phénomène de la congélation du mercure eſt encore enveloppé dans des brouillards très épais, qui ne ſauroient être diſſipés que par des expériences réiterées & variées de différentes manieres: c'eſt à quoi auſſi nos Académiciens ſe propoſent de ſonger dans la ſuite.

Sur

Sur l'Analyſe chymique de quelques minéraux remarquables.

Lettre de M. Raspe adreſſée à M. le Conſeiller de Collèges Pallas & lue à l'Académie le 23 May. 1785.

Entral bey Mamborn in Cornwallis den 5 Martz 1785.

Unter einer Menge zu unterſuchenden Stuffen und Bergarten wurden mir im vorigen Januar ein leberfarbner ſchwartzgeſtreifter ungemein ſchwerer feldſpathartiger Stein, und ein andrer ſchwarzbrauner und mulmigter überbracht, die ſich von zwey neuentdekten mächtigen Gängen herſchreiben. Ihre ausnehmende ſpecifiſche Schwere brachte mich natürlicher Weiſe auf den Gedanken daſs ſie zum Geſchlecht des Schwerſteins oder Tungſteins gehören mögten, worin ich mich auch nicht irrte: ſie veranlaſste mich aber auch, ſie im ſtärckſten Schmelzfeuer zu probiren, nach verſchiedenen Methoden auf Metall. Der Erfolg übertraf meine Erwartung. Sie gaben nicht nur reichlich ein und ebendaſſelbe Metall, ſondern auch, und das war ein neues Phänomen für mich, ein Metall deſſen gröſter Theil von allen bekannten Metallen und Halbmetallen, ſo viel ich noch einſehen kann, verſchieden iſt.

Daſs die Schwer- oder Tungſteine Eiſen enthalten, hatte Cronſtädt ſchon vor vielen Jahren in den Schwediſchen Abhandlungen von 1751, *und Rinmann eben daſelbſt im Jahrgange* 1754 *geſagt; daſs ſie aus Kalk, Kieſelerde, etwas Eiſen und einer eigenthümlichen Säure beſtehen oder beſtehen ſollen, wuſsten wir aus Schechtens Beobachtungen im Jahr* 1781. *Daſs ſie ein anderes Metall als Eiſen, ein eigenthümliches neues Metall enthalten, und daſs*

daſs dieſes aus der Scheel'ſchen Tungſtein-Säure beſtehe, war mir neu und unerwartet.

Es iſt dieſes Metall äuſserſt ſchwerflüſſig, ungemein feuerfeſt, und verträgt ſich ſo gar mit einigen Salzflüſſen. Es iſt von einer weisgrauen Farbe, auf dem Bruche matt, ſehr dicht und feinkörnig, und folglich ausnehmend hart, denn es ſchneidet Glaſs, als das beſte Stahl; dabey iſt es nicht ſo ſpröde und leichtbrüchig als Guſs-Eiſen, ſondern hat eine ausnehmende Steifigkeit. Seine Federkraft kann ich noch nicht beſtimmen, weil ichs bis jezt noch nicht in die gehörigen Formen habe verarbeiten laſſen können. Vermöge des beigemiſchten Eiſens roſtet ſeine Oberfläche in hieſiger feuchten Seeluft, aber minder als Eiſen und Stahl. Gewiſſen Glasflüſſen gab es einigemahl eine angenehme Zeiſiggrüne Farbe, die vom Kupfer- und Nickel-grün mercklich verſchieden iſt. Allem Schein nach wirds zur Hervorbringung nüzlicher gemiſchter Metalle ſehr brauchbar ſeyn.

Im Schmelzfeuer gab mir der leberfarbne Stein 746⅓ ℔. *und der mulmigte Coffebraune und ſchwärzliche* —— 330 ℔. *dieſes Metalles, in einer Probe von* 2240 ℔. *oder einer Tonne.*

Um ſeinen Eiſengehalt und Natur genauer zu beſtimmen, zerlegte ich eben dieſe Steinarten auf dem naſsen Wege; und da gab mir der leberfarbne Stein folgende Producte nach der vom Herrn Scheele bekant gemachten Methode

Luftgeſäuerten Kalk	——	——	——	746⅔	℔.
Eiſen	——	——	——	105	——
Sogenannte trokne Tungſteinſäure oder vielmehr einen weiſsen metalliſchen Kalk	——	——		592⅔	——

das übrige war unaufgelöſeter und unauflösbare Kieſelerde.

Dies

Dies geringe Verhältnis von Eiſen machte mich auf die Tungſteinſäure ſo gleich aufmerkſam; aus ihr muſste natürlicher Weiſe der gröſste Theil des im Schmelzfeuer erhaltnen Metalles beſtehen; ich war alſo ſogleich völlig berechtigt ſie für eine Metalerde zu erklären, wie man ohnedem vermuhten konnte aus ihrem Verhalten zum äzzenden flüchtigen Alcali.

Völlig von Eiſen getrennt, oder auf dem naſsen Wege geſchieden, habe ich ſie aber bis jezt noch durch kein Feuer, Zuſatz oder Methode, zu Metall reduziren können. Vielleicht iſt man darin glücklicher in der Folge.

Sie hat übrigens die Eigenſchaften welche Herr Scheele im Jahr 1787 entdeckte und beſchrieb. So lang ſie noch nicht durch äzzendes flüchtiges Alcali aufgenommen und durch Säuren daraus niedergeſchlagen worden, macht ſie mit Säuren eine herrliche gelbe *Farbe; dieſe wird* weis *in obengedachten Alcali, und* blau *durch eine Zinnauflöſung in Salzſäure. Sobald ſie aus dem flüchtigen Alcali einmahl weis niedergeſchlagen iſt durch Säuren, und gehörig ausgeſüſst, abgedunſtet und getrocknet, ſo vermag keine Säure die gelbe Farbe wiederum herzuſtellen, es ſey denn daſs zufälliger oder unverſehener Weiſe das brennbare ſich ins Spiel miſche; mit der Zinnauflöſung in Salzſäure wird ſie aber immer blau ſie ſey im gelben oder weiſsen Zuſtande, und das flüchtige Alcali färbt ſie immer weis.*

So weit ſtimmen meine wiederholten und genauen Beobachtungen, ſo wie unter ſich alſo auch mit den Scheeliſchen, überein. Wegen ihrer Auflöslichkeit aber in ſiedenden Waſser und ihrer eigenthümlichen Säure bin ich noch nicht einſtimmig. Wollen wir uns von der eigenthümlichen Säure überzeugen, ſo müſſen wir ſie vorläufig von der ihr anhängenden fremden Säure völlig befreien.

Sie wird bekanntlich nach der Scheeliſchen Methode mit Säuren aus dem äzzenden flüchtigen Alcali niedergeſchlagen: dieſe denn müſsen entweder durch Ausſüſsung mit kaltem Waſser, oder durch Hitze und Verdünſtung weggeſchaft werden, vt domus Caeſaris a ſuſpicione vacua ſit: *und hier tretten denn ſogleich Schwierigkeiten ein, welche mir bis jezt beides Auflöslichkeit und eigenthümliche Säure zweifelhaft laſſen.*

Wird ſie aus dem äzzenden flüchtigen Alcali mit der geringſtmöglichen Menge einer Säure niedergeſchlagen, und das über dem weiſsen Niederſchlage ſtehende Fluidum *ſorgfältig davon abgenommen, ſo iſt gedachter Niederſchlag im ſiedenden Waſser zwar auflöslich aber nur auf eine anſcheinende Weiſe; er geht nemlich mit dem Waſser durchs Scheidepapier, macht das Waſser milchicht ſo lang er darin diluirt und hängen bleibt, und fällt nach wenig Tagen von ſelbſt als ein weiſſes Pulver gröſtentheils wieder zu Boden. So gar mit kaltem Waſser geht er durchs Scheidepapier mit gleichem Erfolge. An Ausſüſsung deſſelben iſt alſo auf dem Wege nicht zu denken, und die ſchwachen Spuhren einer Säure bleiben daher natürlicher Weiſe zweideutig und zweifelhaft.*

Wird hingegen dieſe Metallerde mit zu vieler Säure niedergeſchlagen, und dem Alcali auch nur ſo viel zugeſezt daſs das Zuckerpapier zu röthen anfängt, oder aber wird ſie heis abgedunſtet und von der anhängenden Säure befreiet, ſo iſt gar an keine weitere Auflöſung zu denken, ſelbſt die ſich nur einigermaſſen mit vorbenannter höchſt unvollkommen vergleichen lieſse. Daſs ſie durchs Calciniren ihre Auflöslichkeit im Waſser verliehre, hatte Herr Scheele ſelbſt bemerkt, daſs ſie überhaupt auflöslich und eine eigenthümliche Säure ſey, iſt mir noch zweifelhaft. Wir können alle irren und zuverläſsig irrt ſich dieſer groſse Scheidekünſtler in der Angabe, daſs Zinn durch die ſo genannte Tungſteinſäure blau nieder-

niedergeſchlagen werde: denn durch wiederhohlte übereinſtimmende und entſcheidende Verſuche bin ich völlig überzeugt, daſs hier fallacia optica *eingetreten, daſs das Zinn nicht niedergeſchlagen werde, und daſs im gegentheil der weiſse oder gelbe Metallkalk oder Tungſteinſäure durch die Zinnauflöſung blau gefärbt werde.*

Was Bergmann darüber geſagt haben mag, iſt mir noch unbekannt, da mir der dritte Theil ſeiner Werke noch nicht zu Geſicht gekommen. Auch weiſs ich nicht ob ſich Don Luyarte *bis zur Tungſteinſäure verſtiegen habe in ſeiner Abhandlung vom neuen Halbmetalle des Wolframs, die bisher ihren Weg noch nicht zu mir gefunden hat. So bald ich von lezterer hörte, machte ich mich an den Wolfram — und ſiehe da war es daſselbige Metall, das ich dem Tungſtein abgezwungen hatte — nur mehr mit Eiſen gemiſcht, als ich auf dem naſsen Wege fand. Wolfram und Tungſtein ſind daher Varieteten eines Geſchlechts; Erze eines Halbmetalles einer Art. Ob dieſes ſeinen Rang beſser behaupten werde als der* Siderite? *muſs ich fürs erſte dahin geſtellt ſeyn laſsen, biſs ich meine Verſuche mit dem Zinn geendigt habe. Hiemit beſchäftige ich mich in dieſem Zinnlande von Rechts wegen, um ſo mehr da dieſes Metall dem Scheidekünſtler manchen Poſsen ſpielt, und nach ſeiner Natur und ſeinen Eigenſchaften bey weitem nicht ſo bekannt iſt, als es ſeyn ſollte.*

Eine ſonderbahre natürliche Miſchung von Schwefel, Zink, Zinn, und Kupfer, als Fahlerz zuſammen vererzt, und mit Arſenic innigſt verbunden, fiel mir erſt vor ein paar Tage in die Hände.

Avis au Public concernant un vocabulaire polyglotte

par M. le Conſeiller de Collèges Pallas.

Communiqué à l'Académie le 30 *Mai.*

Les recherches ingénieuſes & profondes de pluſieurs ſavans de notre ſiecle ſur l'affinité & l'origine des langues de nations ſouvent très-éloignées entr'elles, & les éclairciſſemens de l'hiſtoire ancienne des hommes que pluſieurs Hiſtoriens eſtimables ont ſû tirer de ces recherches, donnent aujourd'hui un nouvel attrait, une direction plus décidée & un but plus philoſophique à une étude, laquelle jusqu'ici paroiſſoit ſeche, ingrate & même ſtérile & frivole à des eſprits ſuperficiels. En parcourant les ouvrages d'un Court de Gebelin, on reſte ſouvent étonné des inductions lumineuſes que l'auteur a ſû tirer de ce fond, & l'on ne peut s'empecher de régretter que cet homme laborieux n'ait pu ſoumettre à ſa méthode toutes les langues de la terre. D'après l'analyſe & la comparaiſon heureuſe de celles qu'il avoit été à même de recueillir, perſonne ne doutera que la connoiſſance de celles que l'intérieur de l'Aſie pouvoit lui fournir, ne l'auroit conduit à des découvertes encore bien plus intéreſſantes.

L'Empire de Ruſſie qui s'étend ſur une grande partie de cette Aſie, partie presq'inconnue aux ſavans dans les temps antérieurs à Pierre le Grand, contient ſans doute plus de nations & de peuplades, de langues & de dialectes qu'aucun Royaume de la terre. L'éſpace très reſſerré du Caucaſe, habité par

par des peuplades peu nombreuſes & très-voiſines entr'elles, recèle plus de vingt & deux dialectes de huit ou neuf langues différentes. La Sibérie, plus vaſte, en offre un plus grand nombre encore, & la ſeule presqu'isle du Kamtchatka dont la population, lors de ſa découverte par les Ruſſes, ne ſembloit que commencée, contenoit neuf dialectes différens, de trois langues héterogènes. La plûpart de ces langues ſont bien plus caracteriſées, ont bien moins de rapport entr'elles & à toutes celles de l'Europe, que celles-ci n'en ont conſervé avec l'ancien celtique. Quel vaſte champ de découvertes & quelle inſtruction pour l'hiſtoire, un littérateur judicieux ne pourra-t-il pas trouver dans une collection de cette grande varieté de langues de peuples, dont l'origine & les migrations nous ſont, pour la plûpart, abſolument inconnues, & dont les différentes tribus ſe trouvent ſouvent éloignées l'une de l'autre à des diſtances immenſes, quelquefois en ſi petit nombre, que la langue court risque de s'eteindre avec ces peuplades.

Cependant la plûpart de ces langues eſt reſtée jusqu'ici un thréſor caché pour les ſavans: on n'a pas même tenté de rapprocher, ſur un plan uniforme, quelque nombre conſidérable de mots des langues déja connues. Les eſſais de quelques-uns, de donner l'oraiſon dominicale ou quelqu'autre ſuite de phraſes en différentes langues, ſont très-imparfaits, inſuffiſans, & n'ont rendu tout au plus qu'une centaine de langues & de dialectes, c'eſt à dire le tiers à peu près de celles qui exiſtent. Pluſieurs Littérateurs & Hiſtoriographes ont comparé un petit nombre de langues anciennes ou modernes, iſſues d'une ſouche commune. L'on trouve auſſi, outre la reſſource des Dictionnaires, quelques vocabulaires iſolés & épars, ſouvent peu nombreux & rarement correſpondans, dans les voyageurs modernes. Mais perſonne jusqu'ici n'avoit embraſſé l'enſemble

des langues, que la diſperſion & les diviſions de l'eſpèce humaine, & l'influence des révolutions & des cauſes morales, phyſiques & politiques, pendant une longue ſuite de ſiecles & de générations, ont pû produire dans les terres habitables de tant de climats.

Cette vaſte entrepriſe qui pourra enfin conduire à reſoudre le problème de l'exiſtence d'une langue primitive, étoit reſervée à notre ſiecle. CATHERINE II. a daigné ſe faire un délaſſement de cette partie encore inculte de la littérature. Pour ſervir de baſe à un gloſſaire univerſel & comparatif de toutes les langues, Sa Majeſté Impériale a fait Elle-même un choix de mots les plus eſſentiels & les plus généralement en uſage chez les peuples les moins cultivés. Son Empire ſeul pouvoit fournir pour ce gloſſaire, presque le tiers de toutes les langues uſitées ſur le globe, & ſurtout un nombre conſidérable de ces langues encore ignorées des ſavans.

Dans ce choix on a donné la préférence aux ſubſtantifs & adjectifs de premiere néceſſité & communs aux langues les plus barbares, ou qui ſervent à tracer les progrès de l'agriculture ou de quelques arts & connoiſſances élémentaires d'un peuple à l'autre. Les pronoms, les adverbes & quelques verbes, avec les mots numériques, dont la grande utilité pour la comparaiſon des langues eſt aſſez reconnue, y ont été admis, pour rendre ce gloſſaire plus complet & plus inſtructif.

D'après cet excellent modèle l'on a recueilli d'abord toutes les langues & dialectes du vaſte Empire de Ruſſie; enſuite un nombre plus conſidérable encore de langues étrangeres; de ſorte que ce recueil ſurpaſſe déja, quoique continué ſeule-

ſeulement depuis l'année, tout ce qui a été tenté dans ce genre, & s'accroit encore continuellement par des matériaux de toute eſpéce.

L'intention de Sa Majeſté Impériale eſt, que ce recueil ſoit imprimé pour l'utilité du Public. Il ſera arrangé de façon que chaque mot aura à ſa ſuite ſes traductions dans toutes les langues qu'il a été poſſible d'obtenir. Par ce moyen, & par une claſſification de ces traductions ſelon leurs rapports, l'affinité des langues deviendra plus apparente & leur comparaiſon plus facile. La vraie prononciation de mots ſera exprimée avec la plus ſcrupuleuſe exactitude par une orthographe uniforme & déterminée. Un tableau général des langues, tant ſelon leurs rapports, que ſelon leurs patries, pourra ſervir d'introduction à ce travail, dont les ſavans, particulierement ceux qui peuvent en tirer parti, ne méconnoitront pas la grandeur & la difficulté & ſauront en apprécier le mérite.

Sa Majeſté Impériale, ayant bien voulu me nommer pour ſoigner la partie typographique de cet ouvrage jusqu'à préſent unique, je ne ſaurois aſſez-tôt en avertir le Public, dont l'impatience égalera mon empreſſement à remplir les ordres diſtingués de ma Souveraine.

Rapport

Rapport

de M. le Profeſſeur Krafft, ſur deux ouvrages envoyés à l'Académie par M. Giovanni Vivenzio, Chevalier de l'Ordre de St. Conſtantin & premier Médecin de S. M. le Roi de deux Siciles.

Lu à l'Académie le 6 Juin.

Theoria e Prattica dell' Elettricita medica del S. Tib. Cavallo, & della forza dell' Elettricita &c. del S. Birch : tradotte Di Giov. Vivenzio.

Ce qu'il y a dans cet ouvrage de la propre compoſition du Chevalier Vivenzio, ce ſont l'introduction ſous le tître *Hiſtoire de l'Electricité médicinale*, & des remarques ajoutées au texte.

L'hiſtoire ſe rapporte à l'ouvrage de M. Cavallo & renferme deux parties.

1.) M. Cavallo ayant donné à la 3eme partie de ſon traité, un expoſé des méthodes particulieres d'adminiſtrer l'électricité en différentes maladies avec une relation de dix guériſons authentiques effectuées par l'électricité : M. Vivenzio, pour ſuppléer à ce petit nombre de guériſons authentiques, a raſſemblé un grand nombre de cures électriques, faites en différens pays de l'Europe, dont on a fait mention dans les mémoires des Académies, ou dans d'autres livres de phyſique & de médecine. Il fixe la premiere époque de cette application intéreſſante de l'électricité à l'année 1747; en partant des

des prétendûes découvertes du D. Pivati, & après avoir exposé les méthodes de plusieurs savans électriciens; il rapporte aussi quelques unes de ses propres cures électriques.

2.) M. Cavallo ayant donné dans son traité une déscription des appareils de l'électricité médecinale; & ayant écrit à Londres, où les médecins sont le plus à portée d'en connoitre & d'en avoir les meilleurs: M. Vivenzio trouve cette déscription trop raccourcie; il donne plus de détails de la machine électrique de M. Nairne, & d'une autre à plateau de verre, qui est plus portative que celle là, & finit par des instructions utiles & néceſſaires pour l'usage des machines électriques, soit en général, soit dans l'électricité médicinale en particulier.

Les remarques ajoutées au texte, contiennent pour la plûpart ou des circonstances historiques ou des éclairciſſemens sur quelques endroits du traité de M. Cavallo & de celui de M. Birch.

On voit au reste que M. Vivenzio doit certainement être au fait, de tout ce qui concerne la pratique médicinale de l'électricité.

Istoria e Teoria de tremuoti in generale, ed in particolare di quelli della Calabria e di Messina de 1783. *Di Giov. Vivenzio.*

Cet ouvrage est composé de deux parties, dont la premiere est proprement scientifique.

Après un exposé historique des plus anciens tremblemens de terre, dont la mémoire nous ait été transmise, & de ceux du 17eme & 18eme siecle, (par le grand nombre desquels l'auteur veut prouver, qu'ils sont devenus plus fréquens que jamais,) il explique le rapport qu'il y a, entre les tremblemens de terre & les volcans, & passe à la recherche des moyens de mettre des contrées entieres à l'abri de leurs funestes effets, ou même de les prévenir entièrement : Il croit avoir imaginé un tél moyen, tiré des mêmes principes, qu'il a établis dans un mémoire sur la foudre ascendante, très bien accueilli du monde savant.

Il met pour principe, que le tremblement de terre est un effet de l'électricité terrestre, qui accumulée dans l'interieur de la terre au delà de sa quantité naturelle, se decharge pour se mettre en équilibre avec l'électricité de l'atmosphère, & qui pendant cette explosion fait trembler les parties de la terre où elle a lieu, & occasionne selon les circonstances, les éruptions des volcans.

C'est sur ce principe donc, que l'auteur fonde la construction d'un instrument, qu'il appelle *Para-tremuoto* & *Para vulcano*, qui a une analogie parfaite avec les conducteurs électriques, tels qu'ils devroient être dans la supposition de la foudre ascendante.

L'auteur tache à mettre hors de doute l'origine électrique des tremblemens de terre, par des preuves tirées de la théorie électrique, & par une expérience qui fait voir, que moyennant l'explosion électrique on peut secouer des corps legers.

Comme

Comme l'utilité des Para-tremuotos & des Para-vulcanos s'appuie principalement ſur celle des conducteurs électriques : l'auteur prouve très amplement les avantages de ces derniers, ſurtout s'ils ſont pointûs.

Il a auſſi imaginé un appareil, qui prouve l'effet de ſes Para-tremuotos & Para-vulcanos en petit, de la même maniere comme on fait voir celui des conducteurs électriques dans les cours de phyſique.

À la fin il allegue encore en faveur de ces inſtrumens l'opinion des anciens, qui prétendoient que des câvités creuſées à quelque profondeur dans la terre étoient un moyen éfficace, de prévenir les tremblemens de terre ou d'en affoiblir au moins les éffets.

La ſeconde partie de cet ouvrage quoique purement hiſtorique, contenant les rélations authentiques & originales des tremblemens de terre de l'année 1783, eſt toutefois très intéreſſante & pour l'hiſtoire même & pour la géographie phyſique.

Quoique enfin cet ouvrage ne préſente pas des découvertes nouvelles, & que l'origine électrique des tremblemens de terre n'eſt nullement encore conſtatée : cependant la maniere, dont l'auteur a traité cet objet, fait voir ſans doute, qu'il a beaucoup de lumieres & des connoiſſances littéraires fort étendues.

Réflexions
ſur le Territoire Taurique & ſes environs.

par

M. l'Adjoint Zouyef. (*)

Lu à l'Académie le 24 Octobre.

Pour profiter des ſervices que notre Correſpondant en Tauride, M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', offre a l'Académie, elle n'a qu'à lui recommander en général de continuer ſes recherches avec la même aſſiduité, avec laquelle il a ſervi jusq'à préſent l'Académie à ſon plus grand contentement.

La contrée qu'il habite, eſt vraiment digne d'être étudiée par un phyſicien & principalement par quelqu'un qui voudroit pénétrer dans l'hiſtoire du monde jusqu'à une quarantaine de ſiecles en arriere. Le bord montagneux de la près qu'isle Taurique, qui correſpond aux montagnes calcaires de la Moldavie d'un coté & de l'autre à ceux qui accompagnent par l'Abaſie & la Tſchercaiſſie la chaine primitive du Caucaſe jusqu'à la mer Caſpienne, (dont la conſtitution phyſique paroit être la même que celle de la mer noire, de même que leur ſituation ſous la même latitude & peut être auſſi leur âge:) ce bord montagneux, dis-je, n'eſt ſelon toute vraiſemblance, qu'un reſte des montagnes ſecondaires de cette chaine aſiatique, qui conſtituoient au-

(*) Ces réflexions ont ſervi en même temps d'inſtruction pour M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', qui s'eſt établi depuis peu dans la Tauride.

auparavant les bords de l'ocean & qui ſe ſont écroulés pour former le fond de la mer noire, dont la profondeur augmente à méſure qu'elle s'avance vers le midi; auſſi les bords méridionaux ſont-ils tous eſcarpés & presque tous, du moins ceux de la mer noire, brulés. Comme ce bouleverſement qui doit avoir agi ſur une bien plus grande étendue de l'Aſie occidentale & d'une maniere plus violente, que l'on ne peut gueres s'imaginer à préſent, conſiſte dans un ſoulévement des eaux & enſuite dans un réculement de cette côte de l'ocean, produit par un tremblement extraordinaire & par un ou pluſieurs volcans, par lesquels la nature en ſéparant l'Europe & l'Afrique de l'Aſie, a voulu faire paroître les plaines de Ruſſie & de Lithuanie; il ne ſemble pas être d'une même origine, que celle que M. Hablitzl' croiroit peut-être devoir donner à différens endroits des montagnes Tauriques, où il trouve de grands dérangemens, des laves, des pouzzolanes & en général tout ce qui eſt étranger au pays tartare; mais plustôt en faudroit-on mêttre le foyer de l'embraſement & aſſigner la place nâtive de ces productions ignées d'où elles doivent avoir été apportées, dans la mer de Marmora, qui eſt le centre & la vraie ſource des révolutions de l'Aſie mineure & peut-être la cauſe de la perte du monde primitif, dont nous cherchons en vain les traces de ſon exiſtence paſſée.

Pour vérifier cette esquiſſe de conjecture il ne s'agit qu'à raſſembler beaucoup de notices phyſiques & morales dans la contrée même qui fait aujourd'hui la haute Arménie, & que M. Hablitzl' ſera ſans doute à portée de tirer des différentes nations, des marchands arméniens & des juifs, qui traverſent quelque fois toute la Perſe jusqu'au Tibet; il peut auſſi facilement correſpondre pour le même but avec les conſuls de la Ruſſie réſidens à Amaſie, à Erzerum, à Trebeſonde &c. D'un

autre coté il ne ſeroit pas mal à propos, de fouiller à loiſir le terrein en différens endroits de la Presqu'isle; mais je ſuis presque ſur qu'à une certaine profondeur, on ne trouvera aucune trace d'une terre habitée, ou d'autres veſtiges d'une organiſation détruite.

Ce n'eſt que très long temps après ce bouleverſement, que les habitans du haut orient & du voiſinage du Caucaſe ſe hazardoient de deſcendre dans ces plaines pour cultiver le fond déſſeché de la mer, & parmi leſquels s'eſt conſervé la mémoire de cet accident, propagée enſuite par les générations éteintes dans un peuple étranger, tel que les Tartares, qui diſent poſitivement, que le plat païs de la Crimée avec ſes environs ont été ſous l'eau, & n'en ſont ſortis que par une ordonnance d'un Empereur de Conſtantinople, en vertu de laquelle on avoit fait creuſer le détroit pour faire écouler les eaux dans la Méditerranée.

La Bouche ou les Oreilles, comme les Tartares appellent la caverne, qui ſe trouve dans la montagne près d'Eskykrim, ne ſeroit-elle pas un reſte de cette terrible révolution, dont la mémoire a été répandue par les peuples de l'Orient, & s'eſt transmiſe enſuite d'une génération à l'autre, enſorte que l'impreſſion s'en eſt conſervée jusqu'aprés'ent chez les Tartares, qui diſent, qu'on pourroit aller ſous terre de la Crimée jusqu'aux Indes; narration que les Ruſſes appliquent aux catacombes de Kiew pour aller jusqu'à Jeruſalem, & à quelques autres grandes cavernes, qui ſont ſur les frontieres de l'Aſie. Tout cela donne à juger que l'étendue de ce bouleverſement terrible ſurpaſſe de beaucoup notre imagination, & que nous ne pouvons nous en faire une idée, qu'en en ramaſſant ſous un ſeul tableau les veſtiges qu'on en trouve dans l'Aſie mineure.

Je

Je le repete, & c'eſt une ſuite de mes propres obſervations, que l'Océan ſeptentrional d'aujourdhui s'étendoit autre fois jusqu'à la mer noire & la caſpienne ; que les montagnes du caucaſe, ont été les côtes de cet ocean, & que la Ruſſie Européenne telle qu'on la voit actuellement, ainſi que la Lithuanie & une certaine partie de l'Europe, en ont été le fond; que le tremblement de terre s'étendant du golfe perſique jusqu'au Gibraltar, en rompant les chaines continues de l'Europe, de l'Afrique & de l'Aſie, avoit partagé les trois parties du monde. La correſpondance des terrains, les couches, le penchant des montagnes, les volcans éteints, les matieres ignées diſperſées, les pétrifications de la haute mer diſperſees par toute la Ruſſie, & pluſieurs autres veſtiges en permettent la conjecture, & donneront à l'avenir une ample matiere à diſcuter.

M. le Conſeiller de Cour Hablitzl' pourra encore rendre un grand ſervice à l'Académie en lui communiquant les notices hiſtoriques, géographiques, numismatiques & d'autres, qui doivent ſe trouver en aſſez grande quantité aux environs de la mer noire.

Quant à une hiſtoire naturelle du regne animal, ce ne ſont que les débris du monde paſſé, qui pourront lui fournir quelques decouvertes: il trouvera au reſte dans la mer noire, pluſieurs animaux que nous n'avons pas encore dans notre cabinet académique, particulierement du genre des Molluſces & peut être des Zoophytes.

Pour le regne végétal, qui eſt l'étude favorite de notre ſavant correſpondant, le catalogue que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Academie, lui pourra être d'un grand ſecours pour nous

nous envoyer les plantes du Levant, dont nous desirerions faire l'acquisition pour le jardin académique.

Enfin pour le regne minéral, notre Physicien ne manquera pas de nous envoyer tout ce qu'il trouvera d'intéressant dans le genre des fossiles; mais il sera surtout prié de s'informer exactement du lieu & de l'usage de cette argile que les Tartares appellent *Kefekil*: elle doit être bien differente de celle dont on fabrique les пеньковыя трубки, avec laquelle Wallerius, Cronstedt, Born, & d'autres la confondent, & qui se trouve en Natolie à quatre journées de Brousa; la nature de celle-ci est tout à fait inconue. On dit aussi qu'il se trouve près de Baluklava le Наждакъ, ou l'émeril dont les Tartares font un grand commerce à Constantinople.

M. le Conseiller de Cour pourra au reste nous dire si dans la Tauride le quartz feuilleté se trouve en grande quantité, s'il y fait une veine dans la montagne, ou s'il s'y trouve isolé dans les champs, ou enfin entremélé avec d'autres matieres, comme par exemple dans de l'argile pétrifiée. On peut appliquer la même question aux différentes laves qui, comme il paroit, ne se trouvent pas en grande quantité, ce qui feroit voir qu'elles sont natives de la Crimée, & non pas apportées d'ailleurs.

Extrait

Extrait
des lettres de Mrs. Järig & Hablitzl', lues à l'Académie, le 1er Décembre,

par M. le Conſeiller de Collèges Pallas.

I. M. Järig, dans une lettre, datée ſur le lac Gouſſinoy près de Seleghinsk du 15 Août, & adreſſée à M. Pallas, donne avis d'un voyage qu'il a fait vers la haute montagne que les Mongols appellent *Khan khatkhour*, ou Khatkhour la Royale, & qui eſt la plus haute entre le Selengha & le Djida, ſur cette partie de nos frontières vers la Mongolie chinoiſe. Il y avoit recueilli pluſieurs plantes dont il fait mention, entre autres, le *Barberis altaïca*, le *Saxifraga bronchialis*, *l'Aſclepias purpurea*, le *Hypecoum erectum*, & une nouvelle eſpéce de *Lapſana* à feuilles pinnifides, dont M. Pallas ſe reſerve de donner la déſcription à l'Académie, lorsqu'il en aura obſervé la fleur l'été prochain, après avoir cultivé quelques graines qu'il en a reçues.

Par une autre lettre du 1er Septembre, qui étoit accompagnée de plus de quarante eſpéces de graines recueillies pendant le même voyage, M. Järig rapporte les éffets dangereux, qu'un de ſes éléves a reſſentis après avoir maché une très petite branche de la racine du *Stellera Chamaeiasme*, que les Tangouts appellent *Rudzik* & que les Ruſſes, à cauſe de la même reſſemblance avec l'homme que cette racine poſſede de même que la Mandragore, ont nommée Moujik-koren (Мужикъ корень) ou racine-homme. Il en eut une violente inflammation du

goſier, qui menaça de l'étouffer, des vertiges, des nauſées & un tremblement général: enfin après avoir avalé beaucoup de lait, ſurvint un vomiſſement violent, lequel avec des tranchées & un cours de ventre le rétablirent au bout de 12 heures.

Le même M. Järig joint, à une autre lettre de même date, la continuation de ſon hiſtoire des Mongols entrepriſe à la requiſition de M. le Gouverneur d'Irkoutsk Jacobi. Cette dernier lettre eſt au reſte accompagnée de quelques fragmens d'un dictionaire mongol & tangoute, traduits en allemand, & ne contient d'ailleurs rien de remarquable.

II. Par une Lettre datée d'Aſtrachan le 1 Juin 1781. M. Hablizl' Correſpondent de l'Académie marque, qu'il a appris par un Ruſſe longtemps eſclave en Boucharie, que les pâturages artificiels de ce pays, dont la plante a été indiquée par des voyageurs ſous le nom de *Beddé*, n'eſt autre choſe que la Luzerne (*Médicago ſativa*) qui croit auſſi ſur les landes au nord de la mer Caſpienne. Elle eſt auſſi ſpontanée en Boucharie; mais pour en avoir une proviſion ſuffiſante & pour ſubvenir au defaut des prairies naturelles, on la ſeme en aſſez grande quantité, pour pouvoir conjointement avec la paille de quelques eſpéces de Sorgho (*Holcus varius*, *Sorghum*, *Saccharatus*), en nourrir le bétail & ſurtout les chevaux pendant tout l'hyver. On ne choiſit pas les terreins pour la culture de cette plante, mais on eſt obligé de ſubvenir aux prairies factices par un arroſement artificiel. La ſemaille ſe fait au printemps; après que le terrein arroſé a été labouré & herſé, on y répand les graines ſans les couvrir de terre. On fauche la premiere année une ſeule fois, la ſeconde deux fois; & dans la ſuite on peut faire jusqu'à cinq ou ſix recoltes dans une

une saison. Après chaque recolte on donne un arrosement, & la prairie, sans autre culture que d'y répandre de deux années l'une un peu de fumier sec qu'on recouvre d'une couche legére de sable, reste en bon état pendant 25 à 30 années. L'herbe se donne pendant l'été toute verte au bétail; on en seche une quantité pour l'hyver, & on la méle par ménage avec la paille de ris, de froment & du sorgho. Lorsqu'on fait enfin labourer ces prairies, pour leur donner une nouvelle culture, les racines de la luzerne sont encore une fort bonne nourriture pour les bêtes à corne. La culture de la luzerne seroit par conséquent très-utile pour les landes des provinces méridionales de l'empire; parceque cette plante vient même sur des terreins saumâtres & sabloneux, pourvû qu'elle y trouve l'humidité.

Les voyageurs ont parlé d'une autre plante à pâturage que les Bouchares appellent *Touchàn*. Ce n'est que l'espéce d'Absinthe, décrite dans l'ouvrage botanique du célébre Jacquin sous le nom de *Artemisia austriaca*. Mais cette plante n'a pas besoin de culture, elle vient naturellement sur les terreins les plus acides, & sert de nourriture aux brebis, surtout pendant l'hyver, puisqu'elle continue de végéter sous la neige.

III. Sa Majesté Impériale ayant fait équiper une petite escadre sur la mer Caspienne, pour chercher des établissemens plus avantageux & moins mal-sains pour le commerce, M. Hablizl' fut nommé en 1781 Secrétaire de cette escadre, dont le commandement étoit confié à M. le comte Voynovich, Dalmatien, Capitaine de haut bord. Ce fut dans cette expédition que M. Hablitzl' par une lettre datée d'Astrabat en Perse du 7 Juillet 1782. a communiqué à M. Pallas

quelques obſervations faites ſur la côte de la Perſe, ſurtout à Aſtrabat où l'eſcadre avoit hyverné.

Parmi le bêtes domeſtiques du Maſanderan les vaches & les brebis ſont les plus remarquables. Parmi les bêtes à corne on trouve une belle race, dont le dos s'éléve au défaut du col en boſſe ou plutôt en crête, d'un pied & même d'un pied & demi de haut. Cette boſſe eſt garnie de long poils mols & hériſſés, qui continuent le long du col en maniere de criniére. Ce ſont les taureaux qui ſe diſtinguent ſurtout par la hauteur de cette boſſe, les vaches ne l'ont que très-petite & ſouvent à peine ſenſible. Au reſte cette race ne ſe diſtingue du bétail ordinaire que par une encolure plus forte & plus racourcie, le train plus bas, une taille médiocre, & une touffe de poils crêpus ſur le front. Elle ſe trouve dans tout le Maſanderan & aux environs d'Aſtrabat; mais elle ne s'eſt pas encore repandue dans le Ghilan. Les Perſans ignorent d'où cette raçe leur eſt venue; mais en Boucharie & à Khiva, où on l'éléve auſſi, elle eſt connue ſous le nom de vache arabe. Les taureaux de cette race ſe mélent volontiers aux vaches ordinaires, & le produit devient ſemblable au pêre. Dans le diſtrict de Talichan qui borde ſur le Ghilan, on en trouve auſſi à double boſſe, & la race y eſt très abondante. On dit que la ſeconde boſſe de cette variété s'éléve ſur la partie poſtérieure du dos vers la croupe.

On a transporté par ordre de S. A. Msgr. le Prince Potemkin, pluſieurs individus de cette race à St. Pétersbourg, qui ſemblent réuſſir très-bien dans le Parc de Sarskoe-Sélo.

Les

Les brebis ſe trouvent à Aſtrabat de trois races. La premiere eſt la race Calmoucque, qui a une groſſe maſſe de graiſſe ſur la croupe au lieu de queue. La ſeconde, qui eſt la plus commune dans toutes les provinces ſeptentrionales de la Perſe, reſſemble à celle là, mais ſe diſtingue par la petiteſſe de la maſſe de graiſſe & par une petite appendice ou queue attachée à cette maſſe. On la trouve auſſi dans le Caucaſe, d'où les Tſcherkiſſes en envoient des troupeaux au marché d'Aſtrachan. La troiſieme race enfin, celle de Boucharie, qui a une queue applatie, presque triangulaire, à peu près comme la chêvre, & dont la laine eſt crepue & touffue comme celle de la tête d'un négre.

Les Buffles ſont ſi communs dans le Maſanderan, que des troupeaux entiers errent partout ſur les marais, & les bords des anſes de la mer. Comme ils ſont naturellement féroces & vivent en toute liberté, le Capitaine Woodrooſe, cité par Hanway, a pû fort bien prendre ces troupeaux pour des Buffles ſauvages.

On n'a pas de Chameaux dans le Maſanderan, peut-être parceque le buis leur eſt nuiſible, ou parcequ'il faut des landes arides & ſalées pour la réuſſite de ces bêtes.

En voguant ſur la mer Caſpienne M. Hablizl' remarqua au mois de May, qu'un cable rétiré de la mer pendant la nuit, étoit tout parſemé d'étincelles brillantes. En recherchant la cauſe de ce phénomène il trouva, qu'il étoit du à un grand nombre de fauſſes Chevrettes (*Cancer Pulex* Lin.) qui ſe trouvoient attachéés à la vaſe & aux paquets de petites moules, que le cable avoit enlévées du fond, & dont le contenû

avoit été mangé par ces chevrettes, & remplacé par celles qui ſe trouvoient chargées d'oeufs. — D'ailleurs on n'obſerve pas ordinairement dans la mer Caſpienne cette lueur phoſphorique, ſi commune dans l'Atlantique & dans l'Océan des Indes.

Mais M. Hablizl' a remarqué que les couſins, auſſi communs que les lampyrides aux environs de la baye d'Aſtrabat, y paroiſſent tous luiſans la nuit, en automne auſſi bien qu'au commencement de l'été; obſervation qui n'a pas encore été conſignée par aucun voyageur de l'Aſie méridionale.

SUPPLE-

SUPPLEMENT.

L'Académie publie ſous ce tître de Supplément les mémoires que les ſavans étrangers lui ont addreſſés, & qu'elle a jugé mériter ſon approbation. Elle avoit d'abord réſolu de les garder, juſqu'à ce qu'il y en eut aſſés pour en faire un volume, qu'elle auroit enſuite fait imprimer ſéparement: mais comme elle voit qu'un tel arrangement en retarderoit trop la publication, & qu'elle a même appris que divers auteurs impatientés de ne pas voir paroitre leurs mémoires, les avoient déja fait inſérer dans d'autres collections, elle a cru devoir changer de reſolution, en ajoutant à l'avenir à chaque volume de ſes Actes un Supplément, où ſe trouveront, autant que l'eſpace le permettra, les mémoires étrangers qui lui ont été envoyés pendant le cours des années précédentes. Elle en donne ici quatre des plus anciennes, & elle reſerve les autres pour les volumes ſuivans: de ſorte que Mrs. les Auteurs qui lui ont adreſſé juſqu'ici des mémoires, qu'elle a approuvés, peuvent être aſſurés de les voir paroître ſelon l'ancienneté de leurs envoys.

DE CONFERVIS PALVSTRIBVS OCVLO NVDO INVISIBILIBVS;

Auctore

O. F. MÜLLER.

Conuent. exhib. die 24 *Maii* 1779.

Dum Meinbergae et Pyrmonti thermis et fontibus medicatis fruendi gratia totum menſem Auguſtum et partem Septembris anni 1777. degerem, paruam ſpem fructus exinde contra arthritidem redundantis fouens, Confervis paluſtribus et quidem microſcopicis, vt commoratio in his locis aliqua tamen parte proficua eſſet, animum intendi. Res indagatione eo dignior videbatur, quo rariora ſunt vegetabilia nudo oculo prorſus inconſpicua; natura enim, quae larga manu animalcula vndique diſſeminauit, plantas microſcopicas parciſſime diſtribuit. Hinc Botanicorum omnes, quantum iam memini, ne vllum quidem regni inuiſibilis ciuem ſuis claſſibus adſcripſerunt, vnicum ſi exceperim, quem *Ledermüller* inuenit, *Linneus*que ſub falſo genere *Byſſi*, nomine *cancellati* adoptauit; Conferuis enim annumerari debere et ſtructura tubuloſa et granula intrinſeca apprime probant. Corrigendus quoque character Confervae genericus, qui a Linneo dicitur: *tubercula inaequalia in fibris capillaribus longiſſimis*; horum enim attributorum vnicum tantum, *capillare* nempe Conferuis in genere proprium eſt. Dicerem potius: *fructificationes*, *ſeu granula intra filum capillare.*

Solitario *Ledermülleri* ſocios plures ex aquis paluſtribus Mejenbergenſibus et Pyrmontenſibus, pulchritudine, ſtructura abſcondita ac euolutione ſeminulorum perquam memorabiles adjicere iuuat.

Nouae hae Conferuae nudo oculo inuiſibiles, genere quidem conueniunt, tres vero familias et vndecim ſpecies conſtituere videntur; has nomine ſpecifico, illas terminatione nominis triuialis (ratio denominationis e deſcriptione patet) diſtinguere volui. Synonyma nulla apud auctores reperio. Species 4. 5. et 10. *Meienbergae*, reliquas *Pyrmonti*, 1. 3. 4 et 11. in paluſtribus *Haunienſibus* quoque inueni, quamlibetque vbique terrarum, haud tamen vulgarem reperiri poſſe, nullus dubito.

A proceſſu filamentorum lineari auta recto tramite deflexo, vegetabilia haec, vt facilius noſcantur *continua* et *diuergentia*, ab interſectione vero *articulata* et *non articulata* dixi.

Filamentis continuis inarticulatis:

1. Conferua *punctalis*, filamentis inarticulatis ſimplicibus, ſerie punctorum longitudinali.

Filamenta teretia absque ſegmentis pellucida, ſimplicia, Confernae *ſerpentinae* maiore varietate triplo anguſtiora; medium percurrunt globuli ſolitarii, pellucidi, in lineam longitudinalem diſtributi.

2. Conferua *porticalis*, filamentis inarticulatis ſimplicibus, lineis punctorum transuerſis arcuatis.

Filamenta teretia pellucida, lineis transuerſis curuatis inſcripta; maiori amplificatione lineae ex punctis conflatae conſpici-

ſpiciuntur; haec granula vireſcentia in lineas arcuatas digeſta ſunt, ac ſeriem porticorum ex totidem lapillis ſmaragdinis fingunt. Articulatam licet ex ſitu punctorum ſeminalium ſuſpicarer, nullas tamen interſectiones detegere potui.

3. Conferua *pectinalis* filamentis inarticulatis ſimplicibus, tranuerſim confertim ſtriatis.

Pulcherrimum vegetabile ſtructura omnium ſubtiliſſima, annulis confertis antennas cancrorum refert.

Filamenta hyalina teretia quidem ſunt, depreſſa tamen apparent, ſtriis circularibus, confertiſſimis et ſubtiliſſimis inſcriptae; mediam longitudinem luor flaueſcens, ſeu lineae binae corrugate p(rcurrunt, aut ſi mauis, materia inter ſtrias flexuoſa, vel potius puluisculus ſeminalis, medium inter duas ſtrias occupat; veſtigium enim ſeminuli aut granulorum aliud in hac ſpecie nullum reperi. Quot obuenere, maximam partem extremitates truncatas, paucae tamen alteram in filum attenuatam habuerunt.

Quaedam ſtriae reliquis remotiores paſſim interſectionem mentiuntur, foco tamen aliquantum mutato, merae ſtriae vbique videntur. Quaedam ſtriarum interſtitia vacua, quaedam puluiſculo flaueſcente in medio farta erant.

Aliud quoque exemplar reperi cuius medium inter duas quaslibet ſtrias globuli bini vel tres pellucidi transuerſim oblongiuſculi occupauerant; in paucis tamen vacuum, ſeu a globulis derelictum erat; hinc globuli hi, ſeu materies flauida, verum Conferuae ſeminium, filamentaque, non *Cancelli* aut *Cyclopis* antennarum exuuiae (qua quidem perquam ſimiles et den-

ſe annulatae et ſimul ſetis breuiſſimis obſita ſunt) ſed verum vegetabile.

Specimina quaedam caeteris triplo anguſtiora reperi; an omnia mera fruſta, anguſtioraque dehinc extremitati attenuatae debeantur?

Varietatem ſingularem et quidem volumine maioris ſpeciminis absque omni ſtriarum circularium veſtigio totam hyalinam, ſola materie flauida in medio inſtructam, aliam annulatam absque omni materiei vmbra reperi, haec an junior ſeminio nondum conſpicuo, an ſemina iam eiaculauerit? qua vero ratione ſtriae concentricae penitus euanuere, nondum concipio.

Frequens occurrit cum Conferua *ſerpentina minore* in ſcaturiginibus Germaniae et Daniae.

Filamentis continuis, articulatis.

4. Conferua *ſerpentina*, filamentis ſimplicibus articulatis, articulis elongatis aequalibus.

Filamenta ſimplicia, teretia, ante maturitatem in ſpiram aliquantum curuata: articuli longi, granulis farti virides, deſtituti hyalini. Puluisculus ſeu granula matura vndique ab interjectionibus medio articuli in aceruum colliguntur extremitatesque vacuas et hyalinas relinquunt; hoc quoque eiecto, articuli toti hyalini perſiſtunt. Variat diametro quadruplo minori, articulorumque maiori et minori longitudine, aequali tamen in quouis indiuiduo; figura quoque coaceruati puluiſculi potiſſimum ratione aetatis varia, minus vel magis contracta; hinc ſerpentiformis vel quadrangula.

In

In filamentis 24 — 28 ſegmenta numeraui; in integro exemplari extremitates obtuſae ſunt.

Omnium maxime vulgaris eſt.

5. Conferua *transuerſina*, filamentis articulatis ſimplicibus: articulis inaequalibus, faſcia duplici.

Filamentum teres articulatum viride, interſectionibus diuerſae longitudinis. Granula ante maturitatem totam plantam occupant ac viridem reddunt, matura vero in quolibet articulo in duos aceruos cumulantur, faſciasque binas virides formant, reliquumque articuli hyalinum praeſtant; denique granula faſciarum in aqua diſperguntur, totumque articulum vacuum et hyalinum relinquunt.

Varia granulorum in articulis maturitas pulcherrimam plantam ſeu bacillum varie faſciatum, articulis totis viridibus, vel faſcia duplici viridi vel prorſus hyalinum ſeu granulis deſtitutum exhibet.

6. Conferua *ſtellina*, filamentis articulatis ſimplicibus: articulis breuibus, aequalibus puncto radiato duplici.

Filamenta pellucida teretia articulata; articuli aequales breues, glomerulis pulueris viridis binis ſubradiantibus inſtructi; quidam, exploſo puluere, vacuos et hyalinos ſe ſiſtunt.

Ante collectionem granulorum hanc plantam haud vidi, vel potius minus noui; ſola enim diſtributione ſeminulorum pleraque huius generis diſtinguuntur. Singularis eſſet,

niſi quaeuis harum Conferuarum ſuum ſingulare haberet, coaceruatio granulorum cuiusuis articuli in duas maculas rotundas, radios breuiſſimos emittentes, quibus quaſi ſerie ſtellarum viridium Conferua nulli ſecunda effingitur.

7. Conferua *decimina*, filamentis articulatis ſimplicibus: articulis quadruplici X. notatis.

Filamenta articulata in maturitate ſubdepreſſa, hyalina, lineolis obliquis vtraque pagina ſeſe in figuram X, quater in quouis articulo ſecantibus, ſeu taeniolae binae bacillo tereti hyalino ita circumcinctae, vt ſibi alternatim in quouis articulo quater incumbant, numerumque romanum XXXX, ſeu ſi mauis duplex M ſibi inuerſe impoſitum efficiant. Taeniarum ſeu lineolarum viridis color moleculis ſeminiferis virentibus debetur, hisque perditis, quaſi vaginae effoetae hyalinae et aegre conſpicuae ſupereſſe videntur.

8. Conferua *quinina* filamentis articulatis ſimplicibus: articulis aequalibus lineis in zic-zac obliquis.

Filamenta pellucida, hyalina, articulata; articuli aequales, cryſtallini, elongati; puluisculus viridis, non glomeratus eſt, ſed globuli pulueris in lineas obliquas nouendecim, non quidem vti in praecedente ſeſe ſecantes, ſed octodecies numerum V. alternatim inuerſum deſcribentes, ducti ſunt. Linea quaeuis in maiori amplificatione globulis tribus pellucidis, paſſim viridibus, paſſim deiecto ſeminio hyalinis, quorum duo extremi lineis collateralibus communes ſunt, conſiſtere videntur.

Oculo nudo congeries myriadum filamentorum in foſſis paluſtribus maſſam gelatinoſam laete viridem offert; pars in va-

vaſculum recepta diſperſa et dispalata quaſi nebulam in aqua ſiſtit; ope lentis manualis ſubſtantia filamentoſa conſpicitur, microſcopio autem minima huius vegetabilis portio aceruum filorum cryſtallinorum ſuis interſectionibus et lineis in zic-zac ductis viſu pulcherrimum exhibet. Duplicem varietatem articulis longis et articulis breuibus inueni; huius rurſus indiuidua reperi, quorum articuli, 3. 4. 6. 7. et 9. lineis obliquis inſcripti erant, illius vero quiuis articulus in omnibus ſpecieminibus lineas 19. continebat; in varietatibus 4. et 7. linearum, lineas ſerie tripla, dupla et vnica globulorum compoſitas eſſe vidi, prouti nempe globuli maturiores feceſſerant; id quod etiam de varietate nouendecim linearum valere poſtera dies docebit.

Filamentis diuergentibus inarticulatis:

9. Conferua *veſicata*, filamentis inarticulatis, ſubramoſis, medio et apice in veſicam productis.

Filamenta viridia, farta granulis pellucidis teretia, iisdem deſtituta depreſſa, dilata absque vlla interſectione paſſim in veſiculam ſphaericam producta; haec raro terminalis eſt, absque proceſſu noui filamenti; interdum ramulum breuem vel in angulum rectum vel in acutum emittunt. Granula matura apice filamenti et ramuli effunduntur, locaque vacua hyalina et pellucida relinquunt.

Hanc *Havniae* quoque in piscina *Roſenburgenſi* ſemel reperi, totam viridem laxam et flexuoſam granulis nondum maturis, granulorumque proceſſu ſtringi et rigidam euadere autumo.

10. Conferua *burſata*, filamentis inarticulatis diuaricatis, veſicas laterales emittentibus.

Filamentum teres viride recta extenſum, dein geniculo aliquantum diuaricatum, mox vero in lineam rectam rurſus productum; ab alterò latere pendent veſiculae indeterminato ſitu et figura (obſeruationes ſufficientes deſunt, vnicum enim exemplar tantum reperire contigit) itidem virides.

Inter Conferuas et Sertularias media.

11. Conferua *ſaccata*, filamentis inarticulatis in idem latus pluries diuaricatis, area globifera alternatim expletis.

Filamenta ſubdepreſſa, facile fragilia, in idem latus bis aut ter diuaricata, alternatim hyalina et quaſi ſacculo granuloſo globulis, oua vel ſemina referentibus, duplici vel triplici ſerie inſtructa; vtraque area hyalina aeque, ac globulis referta, longitudine, globulique granulis reliquarum Conferuarum multoties maiores, numero et ſerie variant.

Haec et praecedens, rariſſimae ſunt.

Pulchritudinem et elegantiam minutorum horum vegetabilium quis non videt? mundi muliebris noua exempla, delicata et venuſta praebere poterint, ſtructuram vero interiorem oculo maxime armato inuiſam, nec niſi ex granulorum ſeu ſeminulorum multifario et tamen conſtante ordine coniiciendam, ſingularem Naturae oeconomiam in eorundem diſpoſitione quis non miretur!

Tubulus eſt, ſeu filum canaliculatum, prima aetate totum viride, ſubopacum; viriditatem et opacitatem conciliant granu-

granula totum tubulum vndique occupantia; haec prouecta aetate loca natiua, quae eorum diſceſſu pellucida euadunt, deſerunt, in Conferuis *diuergentibus* in tubulos varie diſperguntur et coaceruantur, ac demum exitum in extremitate tubuli quaerentia, puluisculi viridis inſtar apice ramulorum effunduntur; in *continuis* vero incertam et determinatam figuram pro diuerſa ſpecie diuerſam, in quouis vero eiusdem ſpeciei articulo eandem, aemulantur, partemque tubuli vacuam pellucidiſſimam relinquunt, matura dein paſſim euaneſcunt; in quibusdam ſimul in globulos pellucidos reſoluuntur (hi forte membranulae, quibus ſecedens puluisculus adhaeſerat) ac denique totus tubulus vacuus et omnino hyalinus conſpicitur.

Figura coaceruatorum granulorum pro diuerſa ſpecie in Conferuis *continuis* globularis, quadrata, flexuoſa, ſtellata, cruciformis, acutangula vel hamata videtur; qua vero lege et quo apparatu omnia haec in re inuiſibili concinnantur, prorſus latet, eo vsque oculum humanum ne armatum quidem penetrare fas eſt, ſatis contentum ſenſu benigniſſimae et infinitae maieſtatis diuinae ad eos initi limites, vnde depoſitis exuuiis noua virtute aeternum progredi ſpes eſt et gloria.

Tabula I. omnia aucta magnitudine exhibentur, oculo enim nudo inconſpicua ſunt.

Fig. 1. Conferua *punctalis*.
—— 2. Conferua *porticalis*.
—— 3. Eadem valde ampliata.
—— 4. Conferua *pectinalis*, valde aucta, cum luore ſeminali totam percurrente.
—— 5. Eadem interſectionibus quibusdam puluere ſeminali vacuis.

Fig. 6. Eadem tota vacua.
—— 7. Eadem acuminata.
—— 8. Conferua *ſerpentina*, iunior virore farcta.
—— 9. Eadem maturior, magis ampliata, puluisculo in acervos vndulatos longitudinales collecto.
—— 10. Eadem, puluisculo in aceruum quadrangularem conflato.
—— 11. Eadem priori varietate ſubtilior.
—— 12. Conferua *transuerſina* articulis repletis, bifaſciatis vel vacuis.

Tab. II.

Fig. 1. Conferua *ſtellina*.
—— 2. Conferua *decimina*.
—— 3. Eadem valde aucta.
—— 4. Conferua *quinina*.
—— 5. Eadem valde ampliata.
—— 6. et 7. Conferua *veſicata*, Havnienſis.
—— 8. et 9. Eadem Pirmontenſis.
—— 10. Conferua *burſata*.
—— 11. Conferua *ſaccata*.

SUR

SUR LES PYRAMIDES ISOPÉRIMÈTRES.

Par

M. *SIMON LHUILIER*,

Citoïen de Genève.

Communiqué à l'Académie le 24 Janvier. 1782.

§. 1.

La Théorie des figures planes Iſopérimètres, entant qu'elle appartient à la Géométrie élémentaire, a déja été traitée par les Anciens: leurs travaux à cet égard nous ont été transmis par Pappus dans le Vme livre de ſes Collections Mathématiques. Il eſt vrai que cette matière pourroit être traitée d'un manière plus lumineuſe & plus méthodique, & qu'on peut même reprocher à cet Auteur, ſur ce ſujet en particulier, un défaut d'exactitude, dans une des ſes propoſitions fondamentales: mais ce défaut eſt aiſé à ſuppléer; & on peut regarder ce point de la Géométrie comme ſuffiſamment développé, même par les élémens. D'ailleurs quelques Auteurs modernes ont traité la même matière, en ſuivant une méthode toute différente. Voyez p. ex. la Géométrie de T. Simpſon & les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1752. Mr. Moula, dans les Mémoires de l'Académie Impériale pour 1737 a appliqué le Calcul différentiel à ce ſujet élémentaire: ſa diſſertation, quoique très-ingénieuſe, ne peut cependant pas être regardée

comme un traité complet, puisque cet Auteur ne parle pas de la variation de la ſurface d'une figure de contour donné, provenante de la variation du nombre de ſes côtés. M. Tommaſini Profeſſeur de Mathématiques à Piſe, a publié en 1774 un ouvrage élémentaire, ſous le titre. *De maximis & minimis ad inſtitutiones geometricas accommodatis*; les deux premiers livres de cet ouvrage renferment, outre le traité élémentaire le plus complet que je connoiſſe ſur les figures planes Iſopérimètres, un très grand nombre de propoſitions détachées relatives à la même matière.

Le 3me & le 4me livre de ce dernier ouvrage ſont deſtinés aux ſolides Iſopérimètres qui ſont l'objet des élémens. Ils renferment en effet un grand nombre de propoſitions intéreſſantes qui, paroiſſant d'abord exiger le calcul différentiel, ſont développées d'une manière élémentaire. Cependant il eſt un égard, auquel cet ouvrage m'a paru très-incomplet, quoiqu'il meritât d'être développé avec ſoin: je veux parler des Pyramides. L'Auteur démontre ſeulement (& encore le fait-il d'une manière qui ne m'a pas paru complette), que de toutes les Pyramides de même hauteur, qui ont pour baſe un même rectangle, celle qui eſt droite a la plus petite ſurface. Procédant enſuite, comme s'il avoit établi une Théorie générale ſur le Minimum de ſurface des Pyramides droites relativement aux Pyramides obliques, ayant des baſes & des hauteurs égales à celles des premières: il établit, ſur les Pyramides droites à baſes régulières, des propoſitions qui lui paroiſſent completter ſon ſujet, & en particulier il ſe croît fondé à conclure ſon 3me livre par les deux propoſitions ſuivantes: *Sphaera prae ſolidis omnibus ipſi aequalibus minima ſuperficie circumcinditur. Solidorum omnium ſub aequali ſuperficie integra maximum ſeu capaciſſimum eſt ſphaera.*

Pappus

Pappus ne nous a transmis qu'une ébauche bien legère des travaux des Anciens ſur cet objet; puisqu'il ſe borne, dans ſon Vme livre déja cité, à comparer entr'elles les ſurfaces des cinq ſolides réguliers ſuppoſés égaux. Et pour obtenir ce but particulier, il établit des propoſitions auſſi particulières, qui ne me paroiſſent pas propres à établir une Théorie générale.

Les Pyramides en général, & les Pyramides triangulaires en particulier (dans lesquelles les premières peuvent toujours être décompoſées), peuvent être regardées comme tenant parmi les ſolides le même rang que les triangles tiennent parmi les ſurfaces planes. En particulier, tout comme la Théorie générale, relative à la variation du contour de ces dernières, quand leur ſurface eſt donnée, & réciproquement, eſt fondée ſur les propoſitions établies ſur les triangles: je penſe que l'examen de la variation de la ſurface des Pyramides en général & des Pyramides triangulaires en particulier, quand leur ſurface eſt donnée, & réciproquement, doit précéder l'examen des ſolides en général, ſous le même point-de-vue, & faciliter beaucoup ce dernier examen. Je me propoſe donc dans ce mémoire de traîter des Maxima & Minima relatifs aux ſurfaces des Pyramides de grandeur donnée, & à leur capacité, quand leur ſurface eſt donnée.

Pluſieurs des propoſitions qui ſeront développées dans ce mémoire par la Géométrie élémentaire, peuvent auſſi être réſolues par les premiers principes du calcul différentiel. Mais, je crois que les règles d'une bonne méthode doivent engager à traiter par les voyes les plus ſimples les objets qui en ſont ſuſceptibles. Tous les Mathématiciens conviennent de rejetter la ſolution d'un Problème élémentaire par les Se-

ctions coniques, ou quelque courbe ſupérieure: il me paroît de même, que les ſujets qui dépendent des élémens, doivent être traités, autant qu'il eſt poſſible, par des méthodes purement élémentaires, dont le grand avantage eſt d'être plus lumineuſes & à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs.

Je penſe d'ailleurs que quelques propoſitions générales auxquelles l'Analyſe géométrique nous conduira dans la matière qui fait l'objet de ce mémoire, ne pourroient être que difficilement développées par ce calcul, & tout au moins d'une manière beaucoup moins ſatisfaiſante, que nous ne ſerons en état de le faire, en ſuivant la marche purement géométrique.

§. 2.

Comme je prens pour démontrées les propoſitions ſur les Iſopérimètres relatives aux figures planes: je regarde comme convenable de donner les énoncés de celles dont je ſerai appellé à faire uſage, ainſi que de leurs inverſes.

1°. De tous les triangles dont la baſe eſt donnée de grandeur & de poſition, & dont le ſommet eſt ſur une droite donnée de poſition, celui dont les jambes ſont également inclinées à cette droite, a le plus petit contour. En particulier: de tous triangles dont la baſe & la hauteur ſon données, le triangle iſoſcèle a le plus petit contour.

2°. De toutes les figures données de grandeur & dont le nombre des côtés eſt donné, la figure régulière a le plus petit contour.

3°. De deux figures égales, celle qui a le plus grand nombre de côtés, a le plus petit contour.

4°. En

4°. En particulier: Le cercle a un contour plus petit qu'aucune figure (rectiligne ou non-rectiligne) qui lui eſt égale.

§. 3.

À ces propoſitions élémentaires relatives aux figures planes, j'ajouterai la ſuivante, que je démontrerai en particulier, à cauſe de ſon importance. La 2de Partie de la 1re Prop. du §. précédent n'en eſt qu'un cas particulier.

Lemme. Soient deux triangles rectangles qui ont une jambe de l'angle droit commune & donnée de grandeur. Soit donnée la ſomme des rectangles des deux autres jambes de l'angle droit par des droites données: La ſomme des rectangles des Hypothénuſes par les mêmes droites reſpectivement, eſt la plus petite, lorsque ces deux triangles peuvent convenir.

Soient deux triangles rectangles A C X, A C Y, dont une jambe A C de l'angle droit eſt donnée de grandeur. Soit donnée la ſomme C X × L + C Y × M des rectangles des deux autres jambes de l'angle droit par des droites données L & M. La ſomme A X × L + A Y × M, eſt la plus petite, lorsque les triangles A C X, A C Y, peuvent convenir. Tab. III. Fig. 1.

Soit C X × L + C Y × M = C B × L.

Donc, C Y × M = B X × L;

& C Y : B X = L : M. Soit L : M = A C : B D; & ſoit B D perpendiculaire à C B. Puisque C Y : B X = L : M = A C : B D; les triangles rectangles A C Y, D B X, ſont ſemblables; & en particulier, A Y : D X = A C : B D = L : M. Donc A Y × M = L × D X; & A Y × M + A X × L = D X × L + A X × L = L (A X + D X). Donc la ſomme A Y × M + A X × L eſt la plus petite, lorsque la ſomme A X + D X eſt la plus petite;

petite; c'eſt-à-dire lorsque les points A, D, X, ſont en ligne droite. Alors le triangle A C X eſt équiangle au triangle D B X, & partant au triangle A C Y. Donc, les triangles A C X, A C Y, peuvent convenir.

Scholie. Si les deux triangles propoſés avoient des hauteurs données différentes, on trouveroit de même qu'ils doivent être équiangles, pour répondre aux conditions de l'énoncé. Au reſte cette propoſition ſe démontre auſſi très-aiſément par les méthodes des Maxima & Minima.

Ces principes poſés je paſſe à l'objet principal de ce mémoire, en commençant par les Pyramides triangulaires, dont le développement particulier facilitera le développement général de mon ſujet.

§. 4.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la baſe eſt donnée de grandeur & d'eſpèce, & dont une face eſt donnée de grandeur, celle dans laquelle les deux autres faces ont des hauteurs égales, ou ſont également inclinées au plan de la baſe, a la plus petite ſurface.

Tab. III. Fig. 2. Soit A C B la baſe donnée de grandeur & d'eſpèce d'une Pyramide triangulaire dont la hauteur eſt donnée, & ſoit donnée de grandeur la face décrite ſur le côté A B de la baſe: la ſomme des faces décrites ſur les côtés reſtans A C, B C, eſt la plus petite, lorsque les hauteurs de ces faces ſont égales.

Soit déſigné le ſommet de la Pyramide par S; ſoit P le pié de la hauteur S P; & du point P ſoient abaiſſées ſur les côtés AB, AC, BC, les perpendiculaires PD, PX, PY: les

les lignes SD, SX, SY, ſeront les hauteurs des faces décrites ſur ces côtés.

Soient encore menées, AP, BP, CP, la face ASB étant donnée de grandeur & ſa baſe AB étant donnée: la hauteur SD de cette face eſt auſſi donnée. Dans le triangle rectangle SPD la jambe PD de l'angle droit eſt donnée de grandeur, donc le triangle APB eſt donné de grandeur; donc la ſomme des triangles ACP, BCP eſt auſſi donnée, ou la ſomme des rectangles AC×PX & BC×PY eſt donnée. Les faces ASC, BSC, ſont proportionnelles aux rectangles AC×SX & BC×SY, & la ſomme de ces faces eſt proportionnelle à la ſomme de ces rectangles.

Les triangles rectangles SPX, SPY, ont une jambe commune de l'angle droit SP, & la ſomme des rectangles des jambes reſtantes de l'angle droit PX, PY, par les droites données AC, BC, eſt donnée de grandeur. Donc (§. 3e), la ſomme des rectangles des Hypothénuſes SX, SY, par les mêmes droites, eſt la plus petite, lorsque SX = SY & PX = PY. Donc auſſi la ſomme des faces ASC, BSC, eſt la plus petite, lorsque leurs hauteurs ſont égales, & partant, lorsque ces faces ſont également inclinées au plan de la baſe.

§. 5.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la baſe eſt donnée de grandeur & d'eſpèce, celle dont toutes les faces ſont également inclinées au plan de la baſe, a la plus petite ſurface.

En effet, la grandeur d'une des faces reſtant la même: les hauteurs des deux autres faces doivent être égales, pour

que la ſomme de leurs ſurfaces ſoit la plus petite (§. 4e.). Donc les hauteurs des trois faces doivent être égales deux à deux; donc elles doivent être toutes égales entr'elles.

Alors le pié de la hauteur eſt au centre du cercle inſcrit à la baſe.

§. 6.

Définition. Lorsque la baſe d'une Pyramide eſt circonſcriptible à une cercle, & que le pié de la hauteur eſt au centre de ce cercle; j'appellerai cette Pyramide *droite.*

Lorsque la baſe d'une Pyramide a un centre de figure (un point qui partage en deux parties égales toutes les droites paſſant par lui & terminées au contour de la figure, comme cela a lieu pour les figures régulières paires), & que le pié de la hauteur eſt ſitué ſur ce centre, on peut encore apeller cette Pyramide droite: mais dans la ſuite de ce mémoire, cette expreſſion ſera priſe dans le premier ſens, à moins que je n'en avertiſſe.

§. 7.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la baſe eſt donnée de grandeur, dont un côté de la baſe eſt donné, & dont la face décrite ſur ce côté eſt donnée: la Pyramide, dans laquelle les faces reſtantes ont des baſes & des hauteurs égales, a la plus petite ſurface.

On prouve, tout comme dans le §. 4e. que la diſtance du pié de la hauteur au côté donné de la baſe de la Pyramide eſt donnée, & partant, que le triangle ayant ce côté pour baſe & pour ſommet le pié de la hauteur de la Pyramide, eſt donné de grandeur. Mais la ſurface de la baſe eſt donnée; donc, la ſomme des triangles ayant pour ſommet com-

commun le pié de la hauteur, & pour baſes les côtés inconnus de la baſe, eſt donnée de grandeur. Or, quelle que ſoit l'eſpèce de la baſe, ces deux triangles doivent avoir des hauteurs égales, pour que la ſurface de la Pyramide ſoit la plus petite (§. 4e.). Donc, le rectangle de la diſtance du pié de la hauteur à un des côtés inconnus de la baſe par la ſomme de ces deux côtés inconnus eſt donné. Donc cette diſtance ſera la plus grande, lorsque cette ſomme ſera la plus petite; c'eſt-à-dire (§. 2^d. 1°), lorsque la baſe ſera iſoſcèle.

Soient donc deux Pyramides de même hauteur S P, dont l'une ait pour baſe un triangle iſoſcèle A C B, & l'autre un triangle non-iſoſcèle A C′ B (dont les baſes & les ſurfaces ſont égales). Soit P X, perpendiculaire à S P, la diſtance du pié de la hauteur aux côtés égaux de la baſe iſoſcèle, & P X′ la diſtance de ce pié aux côtés non-donnés de la baſe ſcalène : les lignes S X, S X′, ſeront les hauteurs des faces de ces deux Pyramides, & les ſommes de ces faces ſeront entr'elles comme les rectangles Tab III. Fig. 3.

$$(A C + B C) P X \text{ \& } (A C' + B C') P X'.$$

Je dis que

$$(A C + B C) P X < (A C' + B C') P X.$$

Soit par X′ menée à X S la parallèle X′ S′, qui rencontre P S en S′, il y aura:

Par ſupp. $(A C + B C) P X = (A C' + B C') P X'.$
Donc, $A C + B C : A C' + B C' = P X' : P X = X' S' : S X.$
Donc, $(A C + B C) S X = (A C' + B C') S' X'.$
Mais, $S' X' < S X.$
Donc, $(A C' + B C') S' X' < (A C' + B C') S X'.$
Donc, $(A C + B C) S X < (A C' + B C') S X'.$ *c. q. f. d.*

§. 8.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la baſe eſt donnée de grandeur, mais non d'eſpèce, la Pyramide droite, dont la baſe eſt un triangle équilatéral, a la plus petite ſurface.

En effet: Pour que la ſurface ſoit la plus petite, deux côtés quelconques de la baſe doivent être égaux entr'eux, & les faces décrites ſur ces côtés auſſi égales entr'elles (§. 7e.). Donc les trois côtés de la baſe doivent être égaux deux à deux, & les trois faces doivent être égales deux à deux. Donc les trois côtés de la baſe doivent être égaux entr'eux, & les trois faces doivent être égales entr'elles, ou la baſe doit être un triangle équilatéral, & la Pyramide doit être droite.

§. 9.

De toutes les Pyramides triangulaires données de grandeur, le Tétrahèdre régulier a la plus petite ſurface.

En Effet prenant une face quelconque pour baſe, cette face doit être un triangle équilatéral, & la Pyramide doit être droite, pour que la ſomme des trois faces reſtantes ſoit la plus petite (§. 8e.). Donc tant que quelqu'une des faces n'eſt pas un triangle équilatéral, la ſurface de la Pyramide n'eſt pas la plus petite: partant, pour que la ſurface d'une Pyramide triangulaire donnée de grandeur ſoit la plus petite, chacune de ſes faces doit être un triangle équilatéral, ou la Pyramide doit être un Tétrahèdre régulier.

§. 10.

Les inverſes de toutes les propoſitions précédentes ſont auſſi vraies & ſe démontrent ſenſiblement dela même manière, par le principe général des inverſes.

1°. De

1°. De toutes les Pyramides triangulaires, dont la baſe eſt donnée de grandeur & d'eſpèce & dont la ſurface latérale eſt donnée, la Pyramide droite a la plus grande ſolidité.

2°. De toutes les Pyramides triangulaires, dont la baſe eſt donnée de grandeur, mais non d'eſpèce, & dont la ſurface latérale eſt donnée, la Pyramide droite, qui a pour baſe un triangle équilatéral, a la plus grande ſolidité.

3°. De toutes les Pyramides triangulaires de même ſurface totale, la Pyramide régulière a la plus grande ſolidité.

Il me ſuffira de démontrer l'une d'elles; p. ex. la 1re.

Soient deux Pyramides triangulaires P & P′, aiant une ſeule & même baſe & des ſurfaces latérales égales. Que la 1re ſoit droite, & que la 2de ne le ſoit pas: la ſolidité ou la hauteur de la 1re eſt plus grande que la ſolidité ou la hauteur de la 2de.

Soit une Pyramide droite P″, de même baſe & de même ſolidité que la Pyramide P′. La ſurface latérale de la Pyramide P″ eſt plus petite que la ſurface latérale de la Pyramide P′ (§. 5e.); & partant auſſi plus petite que la ſurface latérale de la Pyramide P. Mais les ſurfaces latérales des Pyramides droites P & P″ ſont entr'elles comme les hauteurs de leurs faces: donc la hauteur d'une des faces de P″ eſt plus petite que la hauteur d'une des faces de P: donc auſſi la hauteur de P″ ou P′ eſt plus petite que la hauteur de P; ou la Pyramide droite P eſt plus grande que la Pyramide oblique P′ de même baſe & de même ſurface latérale.

§. 11.

Il ſeroit aiſé d'appliquer aux Pyramides à baſes quadrangulaires, les propoſitions qui viennent d'être démontrées ſur les Pyramides triangulaires, & de parvenir à la concluſion: que de toutes les Pyramides quadrangulaires de même hauteur, & dont la baſe eſt donnée de grandeur, la Pyramide droite, qui a pour baſe un quarré, a la ſurface la plus petite. Mais le procédé qui m'a conduit à la détermination de ce cas particulier, ne me parroiſſant pas ſuſceptible de généraliſation: je regarde comme ſuperflu de m'y arrêter.

La baſe & la hauteur d'une Pyramide triangulaire étant déterminées: on a pu déterminer cette Pyramide de manière que ſa ſurface fût la plus petite (§. 5e.). Mais je ne crois pas qu'on puiſſe ſe flatter de déterminer généralement la nature d'une Pyramide, dont la hauteur eſt donnée & dont la baſe quelconque a un nombre quelconque de côtés, en ſorte que ſa ſurface ſoit la plus petite. La difficulté de cette détermination tient à l'imperfection de la Théorie générale des équations; comme je vais le faire comprendre par un exemple qui paroît d'abord des plus ſimples.

Soit A B *b a* un quadrilatère dont deux côtés oppoſés A B, *a b*, ſont inégaux & parallèles, & les deux autres côtés A *a*, B *b*, égaux entr'eux. Que ce quadrilatère doive être la baſe d'une Pyramide de hauteur donnée, ayant la ſurface la plus petite.

Tab. III. Fig. 4.

Il eſt aiſé de montrer (à l'exemple du §. 4e.), que le pié de la hauteur doit être ſitué ſur la droite C *c*, qui joint les milieux C & *c* des deux côtés parallèles A B, *a b*. Soit P ce pié; ſoit S P la hauteur donnée de la Pyramide; & ſoient P X, P X′, les perpendiculaires (égales) ſur les côtés A *a*, B *b*.

La

La quantité $AB \times CP + ab \times cP + 2Aa \times PX$ étant donnée

La quantité $AB \times SC + ab \times Sc + 2Aa \times SX$ doit être un minimum.

Donc $AB \times \partial.CP + ab \times \partial.cP + 2Aa \times \partial.PX = 0.$

$AB \times \partial.SC + ab \times \partial.Sc + 2Aa \times \partial.SX = 0.$

Or, $\partial.CP = -\partial.cP.$

$\partial.SC = \frac{cP + \partial.cP}{SC}$

$\partial.Sc = \frac{cP + \partial.cP}{Sc}$

$\partial.SX = \frac{PX + \partial.PX}{SX}.$

De là; $2Aa \times \partial.PX - \partial.cP\,(AB - ab) = 0$; ou

$\partial.PX : \partial.cP = AB - ab : 2Aa.$

Puis $2Aa \times \partial.PX \times \frac{PX}{SX} - \partial.cP\,(AB \times \frac{cP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc}) = 0.$

Donc, $\partial.PX : \partial.cP - AB \times \frac{cP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc} : 2Aa \times \frac{PX}{SX}.$

Donc, $AB - ab : 2Aa = AB \times \frac{cP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc} : 2Aa \times \frac{PX}{SX}.$

Donc, $(AB - ab) \times \frac{PX}{SX} = AB \times \frac{cP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc}.$

Ou, $(AB - ab)\,\text{cos.}SPX = AB + \text{cos.}SPC - ab + \text{cos.}SPc.$

Cette équation développée, en rapportant les inconnues à la ligne Cc p. ex., devient trop compliquée, pour qu'on doive en espérer la solution générale, quel que soit le rapport de AB à ab, & quelle que soit leur distance.

Il est seulement quelques cas particuliers, dont la détermination devient facile d'après cette formule.

1er *Exemple.* Que les lignes AB & ab soient égales; dans lequel cas le quadrilatère $ABba$ devient un paralélo-

lélogramme: l'équation précédente devient,

$$\text{cos. } S\,C\,P = \text{cos. } S\,c\,P\,;$$

ſavoir: les deux faces oppoſées doivent être également inclinées à la baſe. Nous verrons dans la ſuite que ce cas eſt compris dans une propoſition générale ſur les Pyramides dont la baſe a un centre de figure.

2^d. *Exemple.* L'équation précédente eſt encore réſolue toutes les fois que les trois angles S X P, S C P, S *c* P, peuvent être égaux entr'eux, ce qui a lieu, lorsque le quadrilatère A B *b a* eſt circonſcriptible à un cercle, & que le centre & le pié de la hauteur de la Pyramide coincident. Nous verrons dans la ſuite que ce cas eſt auſſi compris dans une propoſition générale ſur les Pyramides dont la baſe eſt circonſcriptible à un cercle.

Ne pouvant eſpérer de déterminer généralement la poſition du pié de la hauteur d'une Pyramide donnée de grandeur, dont la baſe eſt donnée de grandeur & d'eſpèce, pour que, ſa capacité reſtant la même, ſa ſurface latérale ſoit la plus petite: je vais au moins chercher à déterminer quelque propriété caractériſtique de la baſe, à laquelle puiſſe répondre un Minimum de ſurface.

§. 12.

Soient deux Pyramides de même hauteur, dont les baſes ſont égales tant en ſurface qu'en contour. Que l'une de ces Pyramides ſoit droite & que l'autre ne le ſoit pas; ſavoir: que la baſe de la dernière Pyramide ne ſoit pas circonſcriptible à un cercle; ou, ſi elle l'eſt, que le pié de la hauteur ne coïncide pas avec le centre de ce cercle: la ſurface de la 1re Pyramide eſt plus petite que la ſurface de la 2de.

Que

Que la 1re Pyramide ſoit déſignée par P & la 2de par P′. La ſurface latérale de la 1re Pyramide eſt égale à un triangle, qui a pour baſe le contour de ſa baſe, & pour hauteur la hauteur d'une de ſes faces, & la ſurface de ſa baſe eſt égale à un triangle qui a pour baſe ſon contour & pour hauteur le rayon du cercle inſcrit.

Soit *p* le pié de la hauteur de la 2de Pyramide. Que les côtés de ſa baſe ſoyent déſignés par

a, *b*, *c*, *d* - - - - - *i*, *k*;

& ſoient déſignés par

A, B, C, D - - - - - - I, K

les triangles, dans lesquels cette baſe eſt décompoſée par des droites menées du point *p* à tous ſes ſommets.

Soit fait un triangle *l*, ayant pour baſe la ſomme des côtés *a* & *b*, & qui ſoit égal à la ſomme des triangles A & B. Sur le triangle *l* ſoit faite une Pyramide L de même hauteur que la Pyramide P, & dont le pié de la hauteur ſoit ſur le ſommet de ſa baſe. Il découle inmédiatement du §. 3e., que la face de la Pyramide L, oppoſée à ſa hauteur, eſt plus petite que la ſomme des faces de la Pyramide P′, qui ont pour baſes les côtés *a* & *b*.

Soit fait un triangle *m*, ayant pour baſe la ſomme des baſes des triangles A, B, C, ou L & C, & égal à leur ſomme. Sur le triangle *m* ſoit faite une Pyramide M de même hauteur que la Pyramide P′, & dont le pié de la hauteur ſoit au ſommet de ſa baſe. La face de la Pyramide M, oppoſée à ſa hauteur, ſera plus petite que la ſomme des faces, auſſi oppoſées à la hauteur, des Pyramides qui ont pour baſes

les triangles *l* & C; & à plus forte raiſon plus petite que la ſomme des trois faces de la Pyramide P′, qui ont pour baſes les côtés *a*, *b*, *c*.

Soit fait de même un triangle *n*, égal à la ſomme des triangles *m* & D, & ayant pour baſe la ſomme de leurs baſes. Sur le triangle *n* ſoit la Pyramide N de même hauteur que la Pyramide P′, & dans laquelle le pié de la hauteur ſoit au ſommet de la baſe. La face oppoſée à la hauteur de la Pyramide N ſera plus petite que la ſomme des faces oppoſées à leur hauteur des Pyramides ayant pour baſes les triangles *m* & D; & à beaucoup plus force raiſon plus petite que la ſomme des quatre faces de la Pyramide P′, qui ont pour baſes les côtés *a*, *b*, *c*, *d*.

Soit continuée cette réduction jusqu'au dernier triangle *k* de la baſe de la Pyramide P′; enſorte que toute cette baſe ſoit reduite en un ſeul triangle *t*, ſur lequel ſoit conſtruite une Pyramide T de même hauteur que la Pyramide P′, & dans laquelle le pié de la hauteur ſoit au ſommet de la baſe. Par une ſuite de concluſions *a fortiori*, faites dans chaque reduction, on déduira: que la ſurface de la face de la Pyramide T oppoſée à ſa hauteur, eſt plus petite que la ſomme des faces de la Pyramide P′, ou que ſa ſurface latérale.

Les baſes des deux Pyramides P & P′ étant ſuppoſées égales tant en ſurface qu'en contour: le triangle *t* eſt égal à la baſe de la Pyramide P; & ainſi la baſe du triangle *t* eſt égale au contour de la baſe de la Pyramide P. Donc la hauteur du triangle *t* eſt égale au rayon du cercle inſcrit à la baſe de la Pyramide P. Donc la hauteur de la face de la Pyramide T oppoſée à la hauteur de cette Pyramide eſt égale

à

à la hauteur d'une des faces de la Pyramide P. Donc auſſi, cette face de la 1re Pyramide eſt égale à la ſurface latérale de la 2de. Mais cette face de la Pyramide T a été prouvée plus petite que la ſurface latérale de la Pyramide P′: donc auſſi la ſurface latérale de la Pyramide P′ eſt plus petite que la ſurface latérale de la Pyramide P.

L'égalité ou l'inégalité d'inclinaiſon de toutes les faces d'une Pyramide au plan de ſa baſe, eſt donc la proprieté caractériſtique, d'après laquelle on peut juger ſi cette Pyramide jouit ou ne jouit pas de la propriété du Minimum de ſurface, relativement à toute autre Pyramide, dont la baſe eſt égale à la ſienne, tant en ſurface qu'en contour. La poſſibilité de cette égalité ſuppoſe la réunion de ces deux propriétés: quant à la baſe, qu'elle ſoit circonſcriptible à un cercle; & quant à la Pyramide elle-même, que le pié de la hauteur coïncide avec le centre de ce cercle.

En particulier; un cone droit a une ſurface plus petite qu'un cone oblique de même baſe & de même hauteur.

§. 13.

Remarque 1re. J'ai ſuppoſé dans le § précédent, que dans chaque réduction d'une partie d'une Pyramide oblique propoſée, en une Pyramide triangulaire, de la manière dont il eſt développé dans ce §, on pouvoit tirer une concluſion *a fortiori* ſur la petiteſſe de la face de cette dernière Pyramide oppoſée à ſa hauteur. Cette concluſion devient une concluſion ſimple, lorſque la hauteur de la partie de la baſe reduite en un ſeul triangle, dont la baſe eſt égale au centre de cette partie, ſe trouve égale à la hauteur du triangle ſuivant de la baſe. Cette différence ne change rien dans la concluſion finale. D'ailleurs on peut toujours l'éviter, en ſuivant

dans la reduction des triangles de la baſe l'ordre des grandeurs de leurs hauteurs, à commencer par la plus petite, & finir par la plus grande, & réciproquement.

Remarque 2de. La hauteur d'un triangle, dont la baſe eſt égale à la ſomme des baſes d'un nombre quelconque de triangles propoſés, & dont la ſurface eſt égale à la ſomme de leurs ſurfaces, eſt la ſomme de toutes les quatrièmes proportionnelles à la ſomme de leurs baſes, à la baſe & à la hauteur de chacun d'eux.

Remarque 3me. La ſurface latérale d'une Pyramide droite de hauteur donnée, dépend ſeulement du contour de ſa baſe & de la hauteur d'une de ſa faces. Partant toutes les Pyramides droites de même hauteur, dont les baſes ſont égales, tant en ſurface qu'en contour, ont auſſi des ſurfaces latérales égales. En particulier, ces ſurfaces ne dépendent ni de la figure de la baſe, ni du nombre de ſes côtés. Or le nombre des figures égales, tant en ſurface qu'en contour, & circonſcriptibles à un cercle, eſt illimité, tant que l'une de ces figures n'eſt pas un cercle: donc auſſi, le nombre des Pyramides de figures différentes, jouiſſant de la propriété du Minimum de ſurface, eſt illimité. Cependant on ne ſauroit en conclure que ce ſujet donne lieu à une infinité de Minima égaux entr'eux, puisque toutes ces Pyramides ne diffèrent entr'elles que par les différentes transpoſitions d'un Minimum unique, ainſi qu'il eſt évident par le procédé développé dans le §. précédent.

Remarque 4me. Il ſuit en particulier du §. 12me: que, lorsque la baſe d'une Pyramide eſt une figure régulière, cette Pyramide a la plus petite ſurface latérale, lors qu'elle eſt droite

droite. Ce cas particulier peut auſſi ſe déduire immédiatement du §. 2^d, 1°, comme il ſuit.

1er. *Cas.* Que la baſe ſoit une figure régulière d'un nombre pair de côtés.

La ſomme des ſurfaces de deux faces, décrites ſur deux côtés oppoſés, eſt proportionnelle à la ſomme des hauteurs de ces deux faces. Mais ces deux hauteurs ſont les deux côtés d'un triangle dont la hauteur eſt donnée, ſavoir la hauteur de la Pyramide, & dont la baſe eſt auſſi donnée, ſavoir la diſtance de ces deux côtés, ou le diamètre du cercle inſcrit à la baſe. Donc, la ſomme de ces deux hauteurs eſt la plus petite, lorſqu'elles ſont égales; donc auſſi, la ſomme de deux faces oppoſées quelconques d'une Pyramide à baſe régulière d'un nombre pair de côtés, eſt la plus petite, lorſque ces deux faces ont des hauteurs égales. Donc la ſurface totale de la Pyramide eſt la plus petite, lorſque toutes les faces ont des hauteurs égales, & partant, lorſque la Pyramide eſt droite.

On démontre de même: que, lorſque la baſe d'une Pyramide a un centre de figure, le pié de ſa hauteur doit coïncider avec ce centre, pour que ſa ſurface ſoit la plus petite. Et cela s'applique en particulier aux Pyramides qui ont pour baſe un parallélogramme.

2^d. *Cas.* Que la baſe ſoit une figure régulière d'un nombre impair de côtés.

Que la ſurface d'une des faces reſte la même; & partant, que la diſtance du pié de la hauteur à un des côtés de

la baſe reſte la même. Ce pié ſera ſitué ſur une droite donnée de poſition parallèle à ce côté. Il eſt très aiſé de montrer, que la ſomme de deux triangles, ayant ce pié pour ſommet, & pour baſes deux côtés quelconques également éloignés du premier de part & d'autre de lui, eſt toujours la même. Donc la ſomme des hauteurs de ces deux triangles eſt auſſi donnée. Mais la ſomme de ces deux hauteurs peut être priſe pour la baſe d'un triangle ayant pour hauteur la hauteur donnée de la Pyramide, & dont les côtés ſeroit les hauteurs des faces décrites ſur ces deux côtés de la baſe. Donc la ſomme des hauteurs de ces deux faces eſt la plus petite, lorsque ces hauteurs ſont égales. Donc auſſi, la ſomme de ces deux faces (qui eſt proportionelle à la ſomme de ces hauteurs) eſt la plus petite, lorsqu'elles ſont egales. Donc, une face reſtant la même, la ſomme de toutes les faces reſtantes eſt la plus petite, lorsque deux faces également éloignées de la 1re ont des hauteurs égales; c'eſt-à-dire lorsque le pié de la hauteur eſt également éloigné de deux côtés quelconques, ſitués à une même diſtance de la baſe de cette 1re face; c'eſt-à-dire lorsque ce pié eſt ſur la droite perpendiculaire à ce côté & paſſant par ſon milieu; ou, ſur la droite qui joint le milieu de ce côté avec le ſommet oppoſé de la figure. Partant, pour que la ſurface totale ſoit la plus petite, le pié de la hauteur doit ſe trouver ſur chacune des droites, qui joignent les milieux de chacun des côtés de la baſe avec le ſommet oppoſé, & partant au centre de cette baſe.

On montre de même que, lorsque la baſe d'une Pyramide de hauteur donnée a un axe de figure; le pié de la hauteur doit être ſitué ſur cet axe, pour que la ſurface de la Pyramide ſoit la plus petite.

§. 14.

§. 14.

De toutes les Pyramides droites de même hauteur dont la baſe eſt donnée de grandeur, & dont le nombre des côtés de la baſe eſt donné, celle qui a pour baſe une figure régulière, a la plus petite ſurface.

La démonſtration eſt très-ſenſiblement la même que celle qui eſt contenue dans le §. 7e.

En effet. Soient P & P′ deux Pyramides droites de même hauteur, dont les baſes ſont égales, & ont des nombres égaux de côtés. Que la baſe de la 1re Pyramide ſoit régulière, & que la baſe de la 2de ne le ſoit pas. Partant (§. 2^{d}, 2°.); le contour de la baſe de la 1re eſt plus petit que le contour de la baſe de la 2de; donc au contraire, le rayon du cercle inſcrit à la 1re baſe eſt plus grand que le rayon du cercle inſcrit à la 2de. Soient ces rayons P X et P X′; & ſoient déſignés par C. B & C. B′ les contours des deux baſes. Soit P S la hauteur commune des deux Pyramides; S X & S X′, ſeront les hauteurs des faces; & les ſurfaces latérales de ces Pyramides ſeront entr'elles comme S X × C. B & S X′ × C. B′. Soit X′ S′ parallèle à X S. Tab. III. Fig. 3.

$$S X : S' X' = P X : P X' = C. B' : C. B.$$

Donc, $S X \times C. B = S' X' \times C. B'.$

Mais, $S' X' < S X'.$

Donc, $S' X' \times C. B' < S X' \times C. B'.$

Donc, $S X \times C. B < S X' \times C. B'.$

Or la ſurface latérale d'une Pyramide droite à baſe régulière eſt plus petite que la ſurface latérale d'une Pyramide droite à baſe irrégulière de même hauteur, de même capacité & du même nombre de faces.

§. 15.

§. 15.

De deux Pyramides droites de même hauteur & à baſes régulières égales, celle dont le nombre des faces eſt le plus grand, a la plus petite ſurface.

La démonſtration eſt la même que celle du §. précédent, en partant du 3° du §. 2^d.

§. 16.

En particulier (d'après le 4°. du §. 2^d.), la ſurface courbe d'un cône droit eſt plus petite que la ſurface latérale d'une Pyramide droite à baſe régulière de même hauteur & de même capacité que lui. Et à plus forte raiſon la ſurface d'un cone droit eſt plus petite que celle d'aucune Pyramide de même hauteur & dont la baſe eſt égale à la ſienne.

§. 17.

Les inverſes des propoſitions précédentes ſe démontrent d'une même manière, & par le principe général des inverſes.

1°. De toutes les Pyramides dont les baſes ſont égales tant en ſurface qu'en contour, & dont les ſurfaces latérales ſont égales, celle qui eſt droite a la plus grande hauteur ou ſolidité.

2°. De toutes les Pyramides droites, dont les baſes ſont égales, dont les ſurfaces latérales ſont égales, & dont le nombre des faces eſt le même, celle dont la baſe eſt régulière, a la plus grande hauteur ou ſolidité.

3°. De

3°. De deux Pyramides droites à baſes régulières égales, & dont la ſurface latérale eſt la même, celle dont la baſe a le plus grand nombre de côtés, a la plus grande hauteur ou ſolidité.

4°. Un cone droit a une hauteur ou capacité plus grande qu'aucune Pyramide dont la baſe eſt égale à la ſienne & dont la ſurface latérale eſt égale à la ſurface courbe du cone.

Je me contenterai de démontrer l'une de ces inverſes, par exemple la 1re.

Soient deux Pyramides P et P′ dont les baſes ſont égales tant en ſurface qu'en contour. Que la 1re ſoit droite & la 2de oblique, & que leurs ſurfaces latérales ſoient égales. La hauteur de la 1re eſt plus grande que la hauteur de la 2de.

Soit P″ une Pyramide droite de même baſe que la Pyramide P, & de même hauteur que la Pyramide P′. Partant la ſurface latérale de P″ eſt plus petite que la ſurface latérale de P′ (§. 12.) ou P (ſupp.). Mais les contours des baſes des Pyramides droites P″ & P ſont égaux. Donc la hauteur d'une face de la Pyramide P″ eſt plus petite que la hauteur d'une face de la Pyramide P; donc auſſi la hauteur de la Pyramide P″ ou P′ eſt plus petite que la hauteur de la Pyramide P.

Je paſſe à la détermination de l'eſpèce d'un cone droit & d'une Pyramide droite dont la baſe eſt donnée d'eſpèce; pour que, la capacité étant la même, la ſurface totale ſoit la plus petite, & réciproquement.

§. 18.

Lemme. Soit un cone droit & ſoit une Pyramide droite circonſcrite à ce cone. La ſurface, ſoit totale ſoit courbe du cone droit eſt à la ſurface ſoit totale ſoit latérale de la Pyramide, comme la ſolidité du cone eſt à la ſolidité de la Pyramide.

Démonſt. Les ſurfaces des baſes du cone & de la Pyramide ſont entr'elles comme leurs contours. Le côté du cone eſt égal à la hauteur d'une des faces de la Pyramide; donc auſſi, la ſurface courbe du cone & la ſurface latérale de la Pyramide ſont entr'elles comme les contours de leur baſes. Enfin le cone & la Pyramide ayant même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, ou comme les contours de ces dernières. Donc, les ſolidités du cone & de la Pyramide, leurs ſurfaces totales, & leurs ſurfaces courbe & latérale, ſont entr'elles dans un même rapport, celui des contours des baſes.

§. 19.

Corollaire. Soient deux Pyramides droites, à baſes ſemblables, circonſcrites à des cones droits de même hauteur: les ſurfaces & les ſolidités de ces deux Pyramides ſont entr'elles comme les ſurfaces & les ſolidités de ces deux cones.

§. 20.

De tous les cones droits de même capacité, celui dont le côté eſt triple du rayon de la baſe, a la plus petite ſurface totale. Et réciproquement, ce cone a la plus grande ſolidité avec la même ſurface totale.

Soit C un cone droit dont le côté eſt triple du rayon de la baſe; & C′ un cone droit égal à lui dont le côté n'eſt pas

pas triple du rayon de la baſe : la ſurface totale du premier cone eſt plus petite que la ſurface totale du ſecond.

Soient circonſcrites à ces deux cones des Pyramides P & P′, ayant pour baſes des triangles équilatéraux.

La hauteur d'une des faces de la Pyramide P eſt triple du rayon du cercle inſcrit à ſa baſe (Supp.); donc cette Pyramide eſt un Tétrahèdre régulier; & la Pyramide P′ n'eſt pas un Tétrahèdre régulier.

Par le §. 19 : C : C′ = P : P′; mais, C = C′ (Supp.); donc, P = P′. Donc (§. 9.) ſurf. P < ſurf. P′. Mais (§. 19.) ſurf. P : ſurf. P′ = ſurf. C : ſurf. C′. Donc ſurf. C < ſurf. C′.

Réciproquement. Surf. C : ſurf. C′ = ſurf. P : ſurf. P′ (§. 19.). Mais (Supp.), ſurf. C = ſurf. C′; donc, ſurf. P = ſurf. P′. Donc (§. 10. 3°.) ſol. P > ſol. P′. Mais (§. 19.) ſol. P : ſol. P′ = ſol. C : ſol. C′. Donc, ſol. C > ſol. C′.

§. 21.

De toutes les Pyramides droites dont la baſe eſt donnée d'eſpèce, celle dont la hauteur d'une des faces eſt triple du rayon du cercle inſcrit à la baſe, a la plus petite ſurface totale avec la même ſolidité, & réciproquement, la plus grande ſolidité avec la même ſurface totale.

La démonſtration ſe déduit du §. précédent par l'inſcription d'un cone aux Pyramides propoſées, de la même maniere que les propoſitions correſpondantes ſur le cone ont été déduites de ce qui a été démontré ſur les Pyramides triangulaires.

Après m'être occupé de la variation des ſurfaces totales des Pyramides & des cones de grandeur donnée, & réciproquement, je vais m'occuper de la variation de leurs ſurfaces latérales ou courbes ſeulement.

§. 22.

Lemme 1er. Lorſqu'on doit couper une droite en trois parties dont le ſolide (le parallélépipède rectangle ayant ces trois parties pour arrêtes) ſoit le plus grand poſſible: il faut la couper en trois parties égales.

En effet. Qu'elle que ſoit une des parties, le rectangle des deux autres eſt le plus grand lorsqu'elles ſont égales entr'elles (§. 2. inverſe du 2°.). Donc ces trois parties doivent être égales deux à deux; donc elles doivent être toutes égales entr'elles.

Scholie. Le raiſonnement eſt le même, pour montrer que le produit continuel de toutes les parties d'un nombre coupé en un nombre propoſé de parties, eſt le plus grand, lorsque ces parties ſont toutes égales entr'elles.

§. 23.

Corollaire. Soit une droite donnée de grandeur à diviſer en deux parties dont on fait le ſolide du quarré de l'une par l'autre: ce ſolide eſt le plus grand, lorsque la 1re partie eſt double de la 2de.

Tab. III. Fig. 5. Soit la ligne A B à couper en X en deux parties, telles que le ſolide $A X^2 \times B X$ ſoit le plus grand. Je dis: que A X doit être double de B X.

Soit

Soit $AX = 2AX' = 2XX'$.

Donc $AX^2 = 4AX' \times XX'$.

Donc $AX^2 \times BX = 4AX' \times XX' \times BX$.

Donc, le ſolide $AX^2 \times BX$ eſt le plus grand, lorsque le ſolide $AX' \times XX' \times BX$ eſt le plus grand ; c'eſt-à-dire (§. 22.) lorsque $AX' = XX' = BX$; & partant $AX = 2BX$.

Scholie. On montre de même, que le produit des puiſſances des parties d'une nombre, dont les expoſans ſont donnés, eſt le plus grand, lorsque ces parties ſont entr'elles comme ces expoſans.

§. 24.

Lemme 2^d. De tous les cones droits inſcrits à une même ſphère, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté, a la plus grande ſolidité. Et réciproquement: de tous les cones droits donnés de grandeur, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport aſſigné, eſt inſcriptible à la plus petite ſphère.

Soit AVYB le demi-cercle générateur d'une ſphère dont AB eſt le diamètre. Soit AXY le triangle générateur d'un cone droit inſcrit à cette ſphère: ce cone eſt le plus grand, lorsque $AX^2 = 2XY^2$. Tab. III. Fig. 6.

En effet. La ſolidité de ce cone eſt proportionnelle au ſolide $AX \times XY^2$, c'eſt-à-dire au ſolide $AX \times AX \times BX$, ou au ſolide $AX^2 \times BX$. Donc ce cone eſt le plus grand, lorsque le ſolide $AX^2 \times BX$ eſt le plus grand; c'eſt-à-dire (§. 23.) lorsque $AX = 2BX$. Alors, $AX^2 = 2BX \times AX = 2XY^2$.

Réciproquement. Soient A Z V, A X′ Y′, les triangles générateurs de deux cones droits égaux C′ & C, dans l'un desquels A X′ Y′, $\overline{A X'}^2 : \overline{X' Y'}^2 = 2 : 1$; tandis que dans l'autre ce rapport n'a pas lieu; la ſphère circonſcrite au 1er cone eſt plus petite que la ſphère circonſcrite au 2^d^.

Soit A V B le demi-cercle générateur de la ſphère circonſcrite au cone C′. Puiſque le quarré de A Z n'eſt pas double du quarré de Z V; A Z n'eſt pas double de B Z. Soit A X = 2 B X, & ſoit A X Y le triangle générateur d'un cone droit C″, inſcrit à la ſphère dont A B eſt le diamètre. Partant (par la directe), le cone C″ eſt plus grand que le cone C′ ou C. Mais les deux cones C & C″ ſont ſemblables; donc les dimenſions du premier ſont plus petites que les dimenſions correſpondantes du 2^d^. Soit Y′ B′ perpendiculaire à A Y′; A B′ eſt le diamètre de la ſphère circonſcrite au cone C′; & A Y : A Y′ = A B : A B′. Mais A Y > A Y′; donc A B > A B′.

§. 25.

Lemme 3e. La ſurface courbe d'un cone droit eſt en raiſon ſousdoublée de la raiſon compoſée de ſa ſolidité & du diamètre de la ſphère circonſcrite.

Soit A X Y le triangle générateur d'un cone droit; & A B le diamètre de la ſphère circonſcrite.

La ſurface courbe eſt en raiſon compoſée de X Y & de A Y; c'eſt-à-dire en raiſon ſousdoublée de la raiſon compoſée du quarré de X Y & du quarré de A Y, qui eſt égal au rectangle de A B par A X. Partant cette ſurface courbe eſt en raiſon

raiſon ſousdoublée de la raiſon compoſée du diamètre AB & du ſolide $XY^2 \times AX$, ou du cone lui-même.

§. 26.

Corollaire. De tous les cones droits inſcrits à une même ſphère, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe comme la diagonale d'un quarré eſt à ſon côté, a la plus petite ſurface. Et réciproquément: de tous les cones droits dont la ſurface courbe eſt donnée, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport aſſigné, eſt inſcriptible à la plus petite ſphère.

La démonſtration de la directe découle immédiatement du §. précédent combiné avec la directe du §. 24. Et la démonſtration de l'inverſe eſt la même que celle de l'inverſe de ce dernier §.

§. 27.

De tous les cones droits de même capacité, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté, a la plus petite ſurface courbe. Et réciproquement: de tous les cones droits de même ſurface courbe, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport aſſigné, a la plus grande ſolidité.

Dém. 1°. La ſolidité étant donnée, la ſurface courbe eſt en raiſon ſousdoublée du diamètre de la ſphère circonſcrite (§. 25.). Donc cette ſurface eſt la plus petite, lorsque ce diamètre eſt le plus petit; c'eſt-à-dire (§. 24.) lorsque la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté.

2°. La

2°. La ſurface courbe étant donnée, la ſolidité eſt en raiſon inverſe du diamètre de la ſphère circonſcrite (§. 25.). Donc cette ſolidité eſt la plus grande, lorsque ce diamètre eſt le plus petit; c'eſt-à-dire (§. 26.) lorsque la hauteur eſt au rayon de la baſe dans la rapport aſſigné.

§. 28.

De toutes les Pyramides droites, dont la baſe eſt donnée d'eſpèce, celle dont la hauteur eſt au rayon de la baſe comme la diagonale d'un quarré eſt à ſon côté, a la plus petite ſurface courbe avec la même ſolidité; & réciproquement, la plus grande ſolidité avec la même ſurface courbe.

La démonſtration eſt déduite du §. précédent, de la même manière que les propoſitions du §. 21. découlent de celle du §. 20.

§. 29.

De tous les ſolides de même capacité, formés par deux cones oppoſés à la baſe, celui qui eſt formé par deux cones droits égaux, dans chacun desquels la hauteur eſt au rayon de la baſe la comme diagonale d'un quarré eſt à ſon côté, a la plus petite ſurface totale; & réciproquement:

1°. Ce ſolide, que j'appellerai *Fuſeau conique*, doit être formé par deux cones droits (§. 12.).

2°. Ces deux cones doivent avoir des hauteurs égales, & partant pouvoir convenir. En effet, la baſe reſtant la même, la ſomme des hauteurs des deux cones qui le forment, eſt donnée; & cette ſomme peut être priſe pour la baſe d'un triangle dont la hauteur eſt donnée; ſavoir le rayen de la baſe com-

commune des deux cones. Donc la ſomme des côtés d'un triangle, qui ſont les côtés des deux cones, eſt la plus petite, lorsqu'ils ſont égaux (§. 2^{d}. 1°.) Mais la ſurface du fuſeau eſt proportionnelle à la ſomme de ces côtés; donc cette ſurface eſt la plus petite, lorsque les côtés des deux cones qui le forment, ſont égaux; & partant, lorsque ces deux cones peuvent convenir.

3°. La ſurface totale du fuſeau eſt la plus petite, lorsque la ſurface courbe de l'un des cones qui le forment, eſt la plus petite; c'eſt-à-dire, lorsque la hauteur de ce cone eſt au rayon de ſa baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté (§. 27.).

L'inverſe ſe démontre de la même manière que celles qui ont été développées précédemment, en prenant pour lemme dans la 2° : que de tous les triangles de même hauteur, dont la ſomme des côtés eſt donnée, celui qui eſt iſoſcèle eſt le plus grand.

§. 30.

De tous les fuſeaux pyramidaux, dans lesquels la baſe commune des deux Pyramides qui les forment eſt donnée d'eſpèce & circonſcriptible à un cercle, celui qui eſt formé par deux Pyramides droites qui peuvent convenir, dans chacune desquelles la hauteur eſt au rayon du cercle inſcrit à la baſe comme la diagonale d'un quarré eſt à ſon côté, a la plus petite ſurface avec la même ſolidité, & la plus grande ſolidité avec la même ſurface.

La démonſtration eſt la même que celle du §. 21.

En particulier. L'Octahèdre régulier a une ſurface plus petite qu'aucun ſolide égal à lui formé par deux Pyramides droites à baſes quarrées; & à plus forte raiſon: la ſurface de l'Octahèdre eſt plus petite que celle d'aucun ſolide égal à lui, formé par deux Pyramides quadrangulaires ou triangulaires quelconques, & réciproquement.

§. 31.

Définition. Soit une figure plane quelconque, & ſoit un point hors de cette figure plane. Soit une droite fixée à ce point, & qui ſe meuve autour de cette figure: elle engendrera une ſurface que j'appellerai *Surface Pyramidale;* & l'eſpace compris entre cette ſurface & la 1re figure, ſera appellé *Solide Pyramidal.* Je vais chercher ſi la propriété du Minimum de ſurface avec la même capacité, & du Maximum de capacité avec la même ſurface, dont jouit un cone droit relativement à une Pyramide quelconque de même hauteur, lui appartient encore relativement à un ſolide pyramidal quelconque. Pour cela je vais développer la 1re vérité d'une manière un peu différente de la précédente & plus ſuſceptible de généraliſation.

Soit une Pyramide quelconque dont la ſurface de la baſe & dont la hauteur eſt donnée: je vais chercher quelque propriété caractériſtique de la baſe, à laquelle ſoit jointe quelqu'autre propriété relative à la poſition du pié de la hauteur, pour que la ſurface ſoit la plus petite.

Soit décompoſée la baſe d'une Pyramide en trapèzes, par des droites parallèles entr'elles; de manière que chacune des deux parties du contour de la baſe, compriſes entre deux parallèles voiſines, ſoit une ſeule ligne droite. Soit M N *n m*

un

un de ces trapèzes. Les deux parallèles M N, *m n*, reſtant de la même grandeur, & leur diſtance reſtant la même, la grandeur de ce trapèze reſte auſſi la même. Item, la diſtance de chacune de ces parallèles au pié P de la hauteur de la Pyramide reſtant la même: les triangles M P N, *m* P *n*, ſont donnés de grandeur, & la ſomme des deux triangles M P *m*, N P *n*, eſt auſſi donnée de grandeur. Soit S le ſommet de la Pyramide. Chacune des deux droites M*m*, N*n*, ſert de baſe à deux triangles, M P*m*, M S*m*; N P*n*, S N*n*; les hauteurs des triangles M S *m*, N S *n*, ſont les hypothénuſes de deux triangles rectangles, dont une jambe commune S P de l'angle droit eſt donnée, & dont les autres jambes ſont les hauteurs des deux triangles M P *m*, N P *n*. Donc (§. 3.) la ſomme des deux triangles M S *m*, N S *n*, eſt la plus petite, lorsque ces deux triangles ſont également inclinés au plan de la baſe de la Pyramide, quelles que ſoient les lignes M *m* & N *n*; & la grandeur des lignes M *m* & N *n* étant variable, la ſomme de ces deux triangles eſt la plus petite poſſible lorsqu'elles ſont égales (d'après le §. 7.). Donc, pour que la ſomme des triangles M S *m*, N S *n*, ſoit la plus petite, les lignes M *m* & N *n* doivent être égales entr'elles, & partant, leur inclinaiſon en dedans de la figure à l'une des paralléles, telle que MN, doit être la même. Ces mêmes droites doivent être également éloignées du pié P de la hauteur; & partant, le point P eſt ſitué ſur la droite qui coupe en deux parties égales l'angle formé par les droites M *m*, N *n*, prolongées, ou ſur la droite perpendiculaire à chacune des droites MN & *m n*, & paſſant par leurs milieux. Tab III. Fig. 7.

Appliquant cette propriété à chacun des trapèzes, dans lesquels la baſe peut être décompoſée par des droites paralléles entr'elles: on trouve que la Pyramide, jouiſſant du Mi-

nimum de ſurface, doit être telle: 1°. que ſa baſe ait un axe de figure, ou une droite qui coupe en deux parties égales les droites qui lui ſont perpendiculaires & terminées au contour de la figure; 2°. que le pié de la hauteur ſoit ſitué ſur cet axe.

Ces deux caractères ne dépendent point du nombre des côtés de la baſe, ou de la diſtance des deux parallèles voiſines, par leſquelles cette baſe eſt décompoſée en trapèzes; & quelle que ſoit la figure de la baſe, on peut lui inſcrire & lui circonſcrire des figures rectilignes qui en diffèrent moins que d'aucune quantité aſſignée. Partant on peut appliquer ces caractères aux ſolides pyramidaux quelconques. Savoir: le ſolide pyramidal de hauteur donnée, dont la baſe eſt donnée de grandeur, & qui doit jouir de la propriété du Minimum de ſurface, doit être tel que ſa baſe ait un centre de figure, & que le pié de ſa hauteur ſoit ſur cet axe de figure. Mais la première de ces propriétés doit avoir lieu ſuivant une direction quelconque; & le cercle eſt la ſeule figure qui ait un axe de figure ſuivant une direction quelconque. Partant le ſolide pyramidal jouiſſant de la propriété de Minimum-Minimorum de ſurface entre tous les ſolides pyramidaux de même hauteur & de même capacité, doit avoir pour baſe un cercle, & le pié de la hauteur doit être au centre de ce cercle. Donc ce ſolide eſt un cone droit.

L'inverſe ſur le Maximum de capacité, quand la baſe & la ſurface courbe ſont données, ſe déduit du principe général des inverſes.

Ce §. peut être regardé comme renfermant la plus grande partie des propoſitions développées dans ce mémoire.

Ainſi

Ainſi le nombre des côtés d'une figure rectiligne étant donné, le nombre de ſes axes de figure eſt le plus grand, lorsqu'il eſt égal au nombre de ces côtés; ou lorsque la figure eſt régulière, le nombre des côtés étant pair ou impair indifféremment, & le nombre des axes d'une figure régulière eſt d'autant plus grand que le nombre de ſes côtés eſt plus grand. Partant de toutes les Pyramides de même hauteur, dont la baſe donnée de grandeur a un nombre donné de côtés, la Pyramide droite à baſe régulière, a la plus petite ſurface. Cette ſurface eſt d'autant plus petite que le nombre des côtés de la baſe (quand ce nombre eſt variable) eſt plus grand; & en particulier, le cone droit a une ſurface plus petite qu'aucune Pyramide de même baſe & de même hauteur. Mais on ne ſauroit, je crois, en déduire immédiatement l'eſpèce du cone droit qui jouit de la propriété du Minimum Minimorum de ſurface.

§. 32.

Les propoſitions élémentaires qui ſont la baſe de ce mémoire, s'appliquent très-heureuſement, non ſeulement à la détermination du ſolide pyramidal qui jouit de la propriété du Minimum de ſurface entre tous les ſolides pyramidaux de même capacité; mais encore à la détermination du ſolide qui jouit de la propriété du Minimum Minimorum de ſurface, relativement à tout autre ſolide qui lui eſt égal.

Soit un ſolide quelconque terminé par des ſurfaces planes. Soit coupé ce ſolide par deux plans parallèles entr'eux; puis par deux autres plans auſſi parallèles entr'eux, & par exemple perpendiculaires aux premiers. Que les diſtances mutuelles de ces quatre plans ſoient aſſés petites, pour que chacune des deux parties de la ſurface du ſolide compriſes entr'eux ſoit une ſeule ſurface plane.

Tab. III. Fig. 8. Soit M N n m m' n' N′ M′, le ſolide terminé par les quatre plans coupans, M n, M N′, m' n, m' N′, & par les parties M m', N n', de la ſurface du ſolide: les plans parallèles M N′, m n', ſont coupés par le plan M m'; donc les lignes M M′, m m', ſont parallèles, de même les lignes M m, M′ m', ſont parallèles; donc, le quadrilatère M m' eſt un parallélogramme. De la même manière le quadrilatère N n' eſt un parallélogramme.

Par m' ſoient menées à n' N′, n' n, les parallèles m' L′, m' l, & par les lignes m' L′, m' l, ſoit fait paſſer un plan, m' L′ L l, qui retranchera du ſolide M N′ m' n, le parallélépipède L N′ m' n.

Les diſtances mutuelles & les grandeurs des lignes M N, m n, M′ N′, m' n', reſtant les mêmes: chacun des quadrilatères, tels que M′ N′ n' m', eſt donné de grandeur, & le parallélogramme m' L′ N′ n', eſt auſſi donné de grandeur; donc le parallélépipède L n N′ m', eſt donné de grandeur. Par les droites m' m, m' L′, ſoit fait paſſer un plan, dont les communes ſections avec les plans M n, m N′, ſoient m l' & L′ l' Le ſolide reſtant M′ m L m' ſera décompoſé en deux prismes triangulaires, l'un & l'autre donnés de grandeur: l'un, M m l' L′ m' M′, a pour baſe le triangle donné de grandeur M′ L′ m', & pour hauteur la diſtance donnée des deux plans parallèles M n, M′ n'; l'autre, L L′ l' m m' l, a pour baſe le triangle donné de grandeur m m' l, & pour hauteur la diſtance des deux plans parallèles M N′, m n'. Donc tout le ſolide M n N′ m' eſt donné de grandeur, tant que les poſitions mutuelles des quatre plans coupans reſtent les mêmes.

Soit

Soit $m'P$ la distance des deux plans Mn, $M'n'$. Soient menées (ou conçuës menées) les diagonales $m'M$, $m'L$, & les droites PM, PL. La base ML & la hauteur du triangle MPL sont données de grandeur; donc ce triangle est donné de grandeur. Mais tout le quadrilatère $MLlm$ est donné de grandeur; donc la somme des deux triangles MPm, LPl, est donnée de grandeur. Or les droites Mm, Ll, qui sont les bases des deux triangles MPm, LPl, sont aussi les bases des deux triangles Mmm', Llm'; & les hauteurs de ces derniers triangles sont les hypothénuses de deux triangles rectangles, qui ont pour jambe commune de l'angle droit la droite donnée $m'P$, & dont les autres jambes de l'angle droit sont les hauteurs des deux triangles MPm, LPl. Donc (§. 3.), la somme des triangles Mmm', Llm', est la plus petite, lorsque leurs hauteurs sont égales; & ensuite, (§. 7.) lorsque les bases Mm & Ll sont aussi égales. Donc aussi, la somme des faces Mm', Nn', est la plus petite, lorsque leurs bases, leurs hauteurs, & leurs inclinaisons à l'un quelconque des quatre plans coupans sont égales.

Quelque soit un solide terminé par des surfaces courbes, on peut lui inscrire ou lui circonscrire un solide terminé par des surfaces planes, de manière que tout ce qui se dit de la grandeur de l'un de ces solides & de celle de ces parties, puisse se dire de la grandeur de l'autre & de celle de ses parties correspondantes à celles du premier.

De là découle la propriété caractéristique du solide de grandeur donnée jouissant de la surface courbe la plus petite. Coupant ce solide par un plan quelconque, les élémens de la surface du solide adjacens à ce plan, doivent lui être également inclinés en dedans du solide, ce qui est la propriété distin-

diſtinctive de la ſphère. Item, menant dans le plan coupant une droite quelconque, les élémens de la commune ſection de la ſurface du ſolide & de ce plan adjacens à cette droite, doivent lui être également inclinés en dedans de la figure, ce qui eſt la propriété caractériſtique du cercle. Partant, ſi on coupe, par un plan quelconque, le ſolide qui avec la même capacité a la ſurface la plus petite, la ſection du ſolide par ce plan doit être un cercle; ce qui eſt la propriété diſtinctive de la ſphère.

Item. Soient deux ſolides compris entre deux mêmes plans parallèles entr'eux, tels que les ſections de ces deux ſolides par un plan quelconque parallèle aux premiers ſoient égales en ſurface. Que l'un de ces ſolides ſoit un ſolide de révolution autour d'un axe perpendiculaire à ces plans, tandis que l'autre ne jouit pas de cette propriété: la ſurface du 1er ſolide eſt plus petite que la ſurface du 2^{d}.

Scholie. La propriété de la ſphère de jouir du Minimum Minimorum de ſurface avec une capacité donnée, & réciproquement, eſt affirmée depuis longtems par un grand nombre de Géomètres. Cependant, les démonſtrations élémentaires que j'en connois, ne s'étendent qu'aux ſolides terminés par des ſurfaces planes, cylindriques ou coniques droites, & circonſcriptibles à quelque ſphère, & elles ne peuvent s'étendre aux autres ſolides, qu'entant qu'on auroit déjà démontré que les premiers jouiſſent de la propriété du Minimum de ſurface relativement aux dernieres, ainſi que cela eſt démontré pour le Cylindre d'Archimède relativement à un prisme quelconque. Il paroiſſoit donc que la détermination rigoureuſe de cette propriété dépendoit de la théorie générale des Maxima & Minima, telle qu'elle eſt due au génie du grand Euler, &

à ſes travaux ſucceſſifs, joints à ceux de quelques autres princes des Géomètres pour la perfectionner, parmi lesquels ſe diſtingue M. de la Grange. La généralité des applications du Calcul des Variations, ſans lequel on ne peut réſoudre les plus belles queſtions, ſoit des Mathématiques pures, ſoit des Mathématiques mixtes, en fait ſentir la néceſſité d'une manière trop évidente & trop ſatisfaiſante, pour qu'on ne ſoit pas pénétré tout à la fois d'admiration & de reconnoiſſance, en étudiant les découvertes de ces génies également vaſtes & profonds. Cependant, comme le défaut, ſoit de tems ſoit de capacité, met le plus grand nombre des amateurs des Mathématiques, ou des branches qui en dépendent, hors d'état de pouſſer leurs études jusqu'aux derniers confins de cette ſublime ſcience: je crois que c'eſt au moins rendre quelque ſervice à cet ordre nombreux de perſonnes, que de montrer, quand cela eſt poſſible, la réduction des propoſitions les plus générales à des principes plus ſimples que ceux qui ſervent de baſe à de Théories dont l'étude exige une grande dépenſe de temps & d'application. C'eſt là le but principal que je me ſuis propoſé dans la compoſition de ce mémoire. Sans cela quelques unes des propoſitions qui y ſont contenues, telles que celles des §. 20 & 27., ſe réſolvent avec plus de briéveté d'après les premiers principes du Calcul différentiel; ſurtout, quand on s'en tient à la détermination ſimple du cas qui répond à quelque limite, ſans s'aſſurer, par une ſeconde différentiation, ou autrement, de l'eſpèce de cette limite.

La ſimplicité des procédés purement géométriques & l'évidence qui les accompagne, les rendent ſans doute très-recommendables dans le plus grand nombre des cas où ils peuvent être employés. Mais la limitation de leurs applications, & le défaut de règles générales qui dirigent, dans ces appli-

cations, ſont bien propres à faire ſentir leur inſuffiſance, & la néceſſité de recourir aux calculs ſuperieurs, qui nous préſentent des reſſources incomparablement plus ſûres & plus étendues. Qu'il me ſuffiſe d'en citer deux exemples relatifs à la manière qui fait l'objet de ce mémoire, & à des ſujets de Géométrie élémentaire. 1°) À une ſphére donnée, inſcrire le cone droit dont la ſurface totale eſt la plus grande (on determine en même temps celui de ces cones, dans lequel la différence, au lieu de la ſomme de la ſurface courbe & de la ſurface de la baſe, eſt la plus grande). 2°) Déterminer la plus grande des Pyramides triangulaires dont les quatre faces ſont données de grandeur. Je crois qu'on s'obſtineroit en vain à appliquer les élémens aux ſolutions de ces deux queſtions. Voyez ſur la dernière l'ingénieux mémoire de M. de la Grange qui a pour tître: *Solutions analytiques de quelques problèmes ſur les Pyramides triangulaires*, dans les mémoires de l'Académie de Berlin pour 1773.

PLEV-

PLEVRONECTARVM DVPLEX SPECIES.

Deſcripta

a *Marco Elieſer Bloch*,

Conuent. exhib. d. 8 *Iul.* 1784.

Pleuronectes Zebra (*).

Pleuronectes oculis dextris, corpore faſciato. P. IV. Ventr. IV. A. LXIV. C. XVII. D. LXXI.

Cum pluribus naturae rerum inſignibus opificiis a mercatore Amſtelodamenſi Vogtio emtus in manus meas delatus eſt piſcis hic, quem maris amboinenſis incolam aſſerebat mercator. Etſi vero indiciis eiusmodi hominum alias confidere non licet, ipſa tamen colorum varietas ſatis exterorum marium hoſpitem arguere videtur. Continetur genere Pleuronectarum, eorum quidem, quorum oculi in dextro latere apparent, ſi quis nempe corpus ita ante ſe collocauerit, vt pinna analis hominis corpus, latus conuexum et varie pictum ſurſum, latus vero planum et album aut decolor infra ſpectet; maxime ore lunulato et corpore anguſto cum Pleuronecte ſolea conuenit,

(*) D Blochs Naturgeſchichte ausländiſcher Fiſche III Theil, pag. 27 et 28. Tab. CLXXXVII.

eique ſimiles ſquamas, duras et denticulatas gerit, quae tactu aſperum faciunt. Caput pro reliquorum congenerum ratione ſatis magnum; oris apertura tamen parua eſt; maxilla ſuperior longior, vtraque dentibus acutis minutisque vallata. Oculi virideſcentes; ſuperior amplior. Branchiarum apertura ampla; membrana branchioſtega ſub operculo recondita, radiis ſex duris diſtinguitur. Linea lateralis recta per medium corpus procedit; anus capiti propinquus. Caput faſciis tribus, corpus reliquum quatuordecim transuerſim per ipſas pinnas ductis faſciis fuſcis ornatur; quarum tres ante penultimam poſitae ſuperne verſus dorſum bifurcantur; duae vltimae cum caudali faſciae lunulam referunt. Hae faſciae haud parum pulchritudinis piſci addunt, eumque nota certa atque indubitata a reliquis congeneribus, quorum oculi in dextra ſiti ſunt, diſtinguere videntur. Cui equidem nomen ab Onagro africano *Zebra* dicto ſumtum attribui propter faſciarum ſimilitudinem; neque enim a quopiam adhuc deſcriptum eſſe memini. Linnaeus equidem poſuit Pleuronectem faſciatum; verum tamen cum illi oculos ſiniſtros tribuat, pinnas vero pectorales deeſſe affirmet, credibile non eſt noſtrum piſcem ab eo indigitari. Gronouius praeterea Pleuronectem faſciatum Surinamenſem deſcripſit; ſed et illi pinnae pectorales deeſſe traduntur; igitur nec hic cum noſtro Pleuronecte vllo modo poteſt comparari.

Color corporis ſuperne flavescens verſus dorſum et ventrem in fuſcum vergit; inferne albeſcit. Pinnae pectorales, itemque ventrales parvae et tenerae; pinna dorſalis cum anali longae. Dorſalis, haud procul ab ore exorta, diſtinguitur radiis LXXI. caudalis XVII, analis LXIV, pectoralis vti et ventralis quatuor radiis componitur.

II. Pleu-

II. Pleuronectes dentatus.

Pleuronectes ore in latere posito.

Pleuronectes *dentatus*, oculis sinistris, corpore oblongo glabro dentibus exsertis. Linn. Systema Naturae p. 458. No. 13.

Posuit quidem iam dudum Linnaeus hunc eundem piscem in systemate suo; sed nimis in eo describendo breuis fuit; nec vllibi pictum eum videre memini. Operae igitur pretium facturum me esse putaui, si denuo accurate delineatum et descriptum Ichthyologis proponerem, quo melius noscerent piscem, cuius os situ singulari et dentibus a congenerum structura valde abludit. Corpus tenue, angustum, longum, ad caput rotundatum, ad caudam vero acuminatum, latere supero virideſcit, infero albeſcit. Caput magnum, vt reliquum omne corpus; squamis denticulatis vtrinque tectum atque exinde tactu asperum. Os paruum, semilunare, non in infero corporis margine excisum, vt in reliquis Pleuronectis, sed in latere supero situm, a labio superiori lobus descendit vsque ad aperturae branchialis viciniam. Hic oris situs nota satis certa et clara piscem hunc a congeneribus separare et distinguere mihi videtur. Non minus tamen certa est illa dentium nota, quam adhibuit Linnaeus; illi enim in latere supero exterius positi os obsident. In labio inferiori octo numeraui dentes, quorum quatuor priores breues atque obtusi, posteriores vero acuti atque inflexi sunt; in labio superiori aeque atque in an-

gulo oris dentes omnes breues et obtuſi. Contra in latere infero maxillae denticulis minutis atque acutis armatae conſpiciuntur, more congenerum. Labia lateris ſuperioris deſunt; in latere contra infero protuberant labia veluti ſoleae. Operculum branchiarum tabula vnica componitur; apertura branchiarum ampla; membrana branchioſtega radiis ſeptem fulcitur. Oculi parui, membrana nictitante obtecti; inferior iuxta maxillam poſitus; ſuperior lineam lateralem fere tangit, magis tamen anterius verſus caput poſitus. Iuxta os, ante oculum inferiorem, in vtroque latere, tam ſupero, quam infero, prominet papilla tubularis; ante eam foramen patet; vtraque pars odoratum atque auditum adiuvare videtur. In Pleuronecte Platesſoide ſimiliter Otho Fabricius nares duas tubulares ante interſtitium oculorum longitudinaliter poſitas vidit (*). Lineae plures per latus ductae apparent; altera quidem ſuperior a nucha exorta, iuxta dorſum parallela protenditur, verſus pinnam caudalem vero definit; altera inferior ab extremo capite, contra morem congenerum exorta ad caudam recta percurrit. Praeterea linea a ſummo dorſo transuerſa ad operculum branchiarum pergit; ibidem vero a linea laterali inferiori, paulo tamen anterius alia linea transuerſa incipit, et per operculum verſus labia oris ducta arcum efficit. Anus capiti iuxta adiacet; pinnae pectorales deſunt. Pinnae ventralis radios ſex, analis LXX, caudalis XVIII. dorſalis XCVIII. radios ſimplices et molles numeravi. Continetur hic piscis familia Pleuronectarum, quibus oculi ſunt ſiniſtri; corpore anguſto, ſquamis denticulatis, orisque ſtructura maxime conuenit cum Solea. Verum in latere infero cirrhum breuem nullum obſeruare mihi licuit.

Habitat

(*) Faun. Groenl. p. 165.

Habitat in Carolina. Dentium argumento animalibus marinis carnivoris aſſociandus, cochleis atque oſtreis victitare videtur in fundo maris latentibus. Praedam vix niſi in latus ſuperius conuerſus rapere poſſe videtur. Denique paruulo victu contentus viuere videtur, cauitate abdominis admodum parva inſtructus, in qua cibum recondat. Linnaeus pisci huic cutem glabram et laeuem, deinde pinnas pectorales aſſignat; ventralis denique radios LXVI. numerat, et caudalem pinnam abeſſe affirmat; in quo quidem ipſe auctoritate aliena Doctoris Garden confiſus errauit vir ſummus, cum quo D. Garden in Ichthyologia haud comparandus eſſe videtur. Squamam denticulatam vnam ſeparatim pictam in eadem Tabula, paulo tamen natura maiorem, exhibui, quo melius reliquarum forma cognoſci poſſet.

MÉMOIRE
SUR L'OCCULTATION DE VÉNUS

obſervée le 12 Avril, 1785. N. S.

Par

M. de Lambre.

Préſenté à l'Académie le 24 Janvier, 1788.

Ce phénomène s'eſt attiré l'attention de presque tous les aſtronomes. J'ai raſſemblé toutes les obſervations qui ſont venues à ma connoiſſance & j'en ai déduit la différence des méridiens & les erreurs des Tables. Voici d'abord les élémens que j'ai employés dans ces calculs.

Le 11, à $23^{h}.\ 50'.$ temps moyen à Paris, le lieu apparent du Soleil compté de l'équinoxe moyen par les Tables de Mayer - - - - $0^{s}.\ 22^{\circ}.\ 56'.\ 8''$
Le lieu vrai corrigé de l'aberration - 0. 22. 56. 28
Mouvement horaire - - - 2. 26, 7

À $23^{h}.\ 50'.$ Longitude appar. de Vénus comptée de l'équinoxe moyen & affectée de l'aberration, ſuivant les ſecondes Tables de M. de la Lande - $2^{s}.\ 6^{\circ}.\ 24'.\ 53''$
une heure après - - - - - 2. 6. 26. 42
Mouvement horaire géocentrique de Vénus + 1. 49

Lati-

Latitude de Vénus à $23^h.\ 50'$ - - $4°.\ 32'.\ 46''$ B
à 0. 50 - - 4. 32. 53
Mouvement horaire en Latitude - - + 7
Parallaxe horizontale de Vénus - - 16, 17
Demi-diamètre de Vénus - - - 15, 56

Longitude de la Lune comptée de l'équinoxe moyen, ſuivant les Tables de Mayer à $23^h.\ 50'$. - $2^s.\ 5°.\ 48'.\ 51''$
Mouvement horaire calculé - - - 34. 43
Latitude de la Lune à $23^h.\ 50'$ - - 4. 51. 16, 5 B
Mouvement horaire calculé - - - - 53, 2
Parallaxe horizontale pour Paris à $23^h.\ 50'$ 58. 31, 1
à 0. 50 58. 28, 9
Diamètre horizontal de la Lune à 23. 50 31. 58, 4
à 0. 50 31. 57, 3
Différence de Longitude entre Vénus & la Lune à $23^h.\ 50'$ - - - 36. 2.
Mouvement horaire relatif. - - 32. 54.
D'où l'on conclut la conjonction à - $0^h.\ 55'.\ 43''$ t.m.
ou à - 0. 55. 6. t.v.

À $0^h.\ 1'.\ 34''$. temps vrai. M. Méchain a vu le premier contact.
à 0. 3. 6. - - - L'immerſion totale de la corne boréale.
à 0. 50. 29. - - - La premiere apparition du bord.

Temps vrai des Obſ.	$0^h.\ 1'.34''$	$0^h.\ 3'.\ 6''$	$0^h.50'.29''$
Équation du temps	+ 37	+ 37	+ 37
Temps moyen -	0. 2. 11	0. 3. 43	0. 51. 6
Temps moy. en deg.	$0^s.\ 0°.32'.45''$	$0.^s\ 0°.55'.45''$	$0.^s 12°.46'.30''$
☉ moyen - - -	0. 21. 3. 51	0. 21. 3. 55	0. 21. 5. 51
Aſcenſ. droite du milieu du ciel -	0. 21. 36. 36	0. 21. 59. 40	1. 3. 52. 21

Haut. du Pole à l'Obſ.	$48^{b}.50'.14''$		
Angle de la verticale	— 14. 51		
Haut. du Pole réduite	48. 35. 23		
Haut. du Nonagéſ. $= h$	$53°.46'.30''$ (*)	$53°.53'.30''$	$57°.14'.15''$
Nonagéſime - - -	$1^{s}.10.19.54$	$1^{s}.10.36.42$	$1^{s}.19.13.33$
Long. ☾ de l'équin. m.	2. 5. 55. 54	2. 5. 56. 47	2. 6. 24. 12
Diſt. ☾ du Nonagéſ. $= D$	25. 36. 0	0. 25. 20. 5	17. 10. 39
Latitude vraie ☾ $= l$	4. 51. 4,3 B	4. 51. 3,0 B	4. 50. 22,3 B
Parallaxe horizont. ☾	58. 30,6	- - - -	58. 28,7
Celle de - - ♀	16,2	- - - -	16,2
Différ. des Parall. $= p$	58. 14,4	- - - -	52. 12,5
Parall. de Longitude	20. 37,6	20. 27,5	14. 42,4
Diſt. app. ☾ Nonag. $= \delta$	25. 56. 37,6	25. 40. 32,5	17. 25. 21,4
Latitude apparente ☾	4. 19. 57,1 B	4. 20. 3,6	4. 22. 31,7 B
Latitude ♀ - - -	4. 32. 47,6 B	4. 32. 47,8	4. 32. 53,4 B
Différ. appar. de Latit.	12. 50,5	12. 44,2	10. 21,7

Mouvement apparent rélatif en Latitude
de la 1re à la 3e obſervation $2'.28'',8 =$ F G,
de la 2de à la 3e obſervation 2. 22. 5.

Longit. appar. ☾	$2^{s}.6°.16'.31'',6$	$2^{s}.6°.17'.14'',5$	$2^{s}.6°.38'.54'',4$
♀	2. 6. 25. 15, 1	2. 6. 25. 17, 9	2. 6. 26. 44, 0
Différ. app. Longit.	8. 43, 5	8. 3, 4	12. 10, 4

Mouvement apparent rélatif en Longitude ſur l'écliptique
de la 1re à la 3e obſervation $20'.53'',9$,
de la 2de à la 3e obſervation 20. 13, 8.
Le même dans la région de la Lune
de la 1re à la 3e obſervation $20'.50'',3 =$ L G,
de la 2de à la 3e obſervation 20. 10, 3.

Hau-

(*) Le Nonagéſime & ſa hauteur ſont calculés avec cette hauteur du Pole réduite au centre de la Terre: par là les parallaxes dans le ſphéroïde ſe trouvent avec la même facilité que dans la ſphére.

Haut. de la ☾ d'après les parallaxes - -	49°. 57′.	- - - -	57°. 15′.
Augment. du diamet.	25″, 3	25″, 3	27″, 8
Diametre de la ☾	31′.58,	31′.58,	31′.57, 0
Diametre augmenté	32. 23, 3	32. 23, 3	32. 24, 8
Demi-diametre -	16. 11, 65	16. 11, 65	16. 12, 4
Inflexion - - -	— 3, 5	— 3, 5	— 3, 5
Demi-diametre de ♀	— 15, 56	— 12, 41 = *u* C	— 15, 56
Diſt. app. des cent. obſ.	16. 23, 71 = VL	15. 55, 74 = V *a*	15. 53, 34 = VF

Je vais expoſer le moyen dont je me ſuis ſervi pour trouver la diſtance apparente des centres dans l'inſtant où la corne boréale a diſparu. Soit V le lieu de Vénus ſuppoſée immobile pendant l'intervalle des obſervations. L & F le centre de la Lune à l'inſtant du contact pour l'immerſion & l'émerſion. C K la ligne des cornes de Vénus, que je prolonge jusqu'en *y* ſur la ligne L F; à l'inſtant de l'immerſion de la corne boréale C, le bord de la Lune étoit au point C. Pour trouver le lieu du centre, avec le rayon C *a* = ½ diametre ☾ augmenté à raiſon de la hauteur, je détermine le point *a* ſur la ligne L F, après quoi j'abaiſſe V *u* perpendiculairement à C *a* & j'ai *u a* ſenſiblement égal à V *a* ou à la diſtance des centres pour l'inſtant de l'immerſion de la corne C. Tab. III. Fig. 9.

Pour l'émerſion de la corne K je me ſers pareillement de K Φ = ½ diam. ☾ augmenté, & je détermine le point Φ ſur L F prolongée. J'abaiſſe K *o* perpendiculairement, j'ai Φ *o* = Φ *k* au moins ſenſiblement, on aura donc Φ V en ajoutant V *o* au ¼ diam. ☾: pour avoir V *a* il falloit au contraire retrancher *u* C du demi-diametre. Soit N *b* le cercle de Latitude qui paſſe par le centre de Vénus, nous aurons l'angle N V C en diſant:

R: fin. Latitude géocentrique de Vénus = Cotang. élon-
Tab. III. gation: Cotang. ♀ V ☉ = tang. K V ♀ = tang. de l'angle for-
Fig. 10. mé par la ligne des cornes & le cercle de latitude = tang. N V C = tang. z V y.

Nous connoiſſons x V z = G L F, nous aurons donc aiſément x V y = x V z — z V y; nous connoiſſons auſſi V x, nous aurons donc V y, d'où C y & K y.

Alors dans le triangle C L y, nous aurons C a = $\frac{1}{2}$ ℂ, C y que nous venons de trouver, & C y a = 90° + x V y, nous en déduirons l'angle C & u C = V C coſ. C.

Dans le triangle K y ☊ nous avons K y, K ☊ & K y ☊ = 90° — x V y, nous calculerons y K ☊ = y V ☊ aſſés exactement pour notre objet. Car 1° de plus ou de moins ſur l'angle V, ne change pas ſenſiblement V o = V K coſ. V.

Avec la premiere & la troiſieme obſervation je trouve: G L F = 6°.47′.13″, L F = 20′.59″,1, L x = 10′.52″,88, F x = 10′.6″,22, V L x = 48°.25′.3″, V F x = 50°.30′.54″, L V A = 55°.12′.16″, F V B = 43°.43′.41″, V A = 9′.21″,35, V B = 11′,28″,93.

Les mêmes quantités réduites à l'éclipt.	9′.23″,1	11′.31″,1
Les Parallaxes de Longitude - - -	20. 37, 6	14. 42, 4
Les différences vraies de Longitude	30. 0, 7	3. 11, 3
Les différences en temps - - - -	54. 44, 0	5. 48, 9
Les temps vrais des obſervations ſont	0^{b}. 1. 34, 0	0^{b}.50. 29, 0

Ainſi le temps vrai de la conjonction eſt 0. 56. 18, 0 ou 56. 17, 9

Les

	AL	BF
Les différenc. appar. de Latit. sont	13′.27″,8	10′.59″,0
Les mêmes calculées ci-dessus	12. 50, 5	10. 21, 7
L'erreur des Tabl. sur la Lat. est donc	+ 37, 3	+ 37, 3

Si l'on compare les différences apparentes observées de Longitudes - -	9′.23″,1	11′.31″,1
avec celles que le calcul nous à données	8. 43, 5	12. 10, 4
On aura l'erreur des Tables en Longit.	+ 39, 6	+ 39, 3

En donnant le signe + aux erreurs des Tables, j'entens que la Lune est trop avancée soit en Longitude soit en Latitude rélativement à Vénus.

Les Tables rapprochoient donc Vénus de la Lune tant en Latitude qu'en Longitude, du moins avant la conjonction; car après la conjonction la différence de Longitudes calculée est la plus forte.

Par un calcul tout semblable fait sur la seconde & la troisieme observation, j'ai trouvé la conjonction à $0^{b}.56'.17'',7$; c'est à dire à $0'',3$ près la même que ci-dessus.

Voici maintenant les observations de M. Toaldo de Padoue, telles qu'elles m'ont été communiquées par M. Cagnoli.

1.) Commencement d'immersion $0^{b}.35'.7'',3$ bonne.
2.) Immersion totale - - 0. 35. 51, 3 très bonne.
3.) Commencement d'émersion 1. 48. 30, 3 très bonne.
4.) Corne supérieure - - 1. 49. 1, 3 douteuse.
5.) Corne inférieure - - 1. 49. 23, 3 bonne.

Je ne donne point les détails du calcul, en voici ſimplement les réſultats:

Obſervat.	Différ. des mérid.	Erreur en Long.	Erreur en Lat.
1 & 3 donnent	38′. 11″.	47″, 8	50″, 8
2 & 5 - -	38. 3, 4	43, 6	47, 7
2 & 3 - -	38. 7, 4	45, 4	43, 9
1 & 5 - -	38. 7, 7	46, 1	53, 5
Milieu - -	38. 7, 4	+ 45, 7	+ 49. 0

Je n'ai fait aucun uſage de la quatrieme obſervation.

Obſervations de M. le Chevalier d'Angos à Malthe, communiquées par M. de la Lande.

1.) Attouchement des limbes - 0^b. 32′. 12″.
2.) Corne inférieure - - - 0. 32. 40.
3.) Attouchement - - - 1. 56. 18.
4.) Corne inférieure - - - 1. 56. 48.

Obſervat.	Différ. des mérid.	Erreur en Long.	Erreur en Latit.
1 & 3 donnent	49′. 21″, 5	1′. 9″, 1	15″, 2
2 & 4 - -	49. 11, 0	1. 3, 0	0, 25
1 & 4 - -	49. 22, 0	1. 9, 3	18, 5
2 & 3 - -	49. 10, 5	1. 3, 0	3, 7
Milieu - -	49. 16, 25	+ 1. 6, 1	+ 9, 4.

La différence des méridiens ſuivant M. le Chevalier d'Angos eſt ſeulement 48′. 28″. (Voyés: Éphem. de M. de la Lande T. VIII. page lxxv.) c'eſt à dire de 48″ plus foible; or l'équation du temps eſt de 37″. On pourroit donc croire que les temps donnés ci-deſſus ſont des temps moyens. En les prenant pour des temps vrais, j'ai donné 20″ de trop à la Lon-

Longitude rélative de la Lune & j'ai augmenté l'erreur des Tables. Il faudra donc la réduire & nous aurons 46″ comme par l'obſervation de Padoue. Cette conjecture très vraiſemblable n'explique pourtant pas l'erreur de la Latitude.

Obſervations de M. d'Arquier à Toulouſe, communiquées par M. de la Lande.

1.) Vénus commence à diſparoitre - 11ᵇ. 42′. 38″.
2.) Diſparition totale - - - - - 11. 42. 53.
3.) Elle reparoit à - - - - - - - 0. 45. 36.
4.) À motié ſortie - - - - - - - 0. 45. 56.
5.) Tout à fait ſortie - - - - - 0. 46. 24.

Réſultats.

Obſervat.	Différ. des mérid.	Erreur en Long.	Erreur en Lat.
1 & 3 donnent	3′. 25″	44″, 7	54″, 0
2 & 5 - -	3. 53.	30, 0	40, 8
2 & 3 - -	3. 46.	33, 7	34, 5
1 & 5 - -	3. 35.	40, 0	64, 0
Milieu - -	3. 39, 75	+ 37, 1	+ 48, 3

On fait communément la différence des méridiens entre Paris & Toulouſe de 3′. 35″. Celles que je viens de calculer ne s'accordent pas aſſez bien entre elles pour mériter beaucoup de confiance.

M. Mougin a obſervé à la Grand-Combe des bois.
La diſparition totale à - - - - - - 0ᵇ. 16′. 14″.
La réapparition à - - - - - - - - 1. 17. 57.

Différ.

Différ. des mérid.	Erreur en Longit.	Erreur en Latit.
17′. 34″. orientale	+ 17″.	+ 30″.

M. de la Lande en me communiquant cette obſervation, m'avoit donné pour différence des méridiens 18′. 15″.

M. Romme a obſervé à Rochefort.

Le premier contact à - - 11ʰ. 39′. 18″.
Et l'émerſion du bord éclairé à - 0. 31. 35.

J'en ai conclu

La différ. des mérid.	L'err. en Longit.	L'err. en Latit.
12′. 54″.	+ 1′. 16″.	+ 44″, 5.

Depuis que j'ai fait ces calculs, M. Méchain m'a donné la différence des méridiens 13′. 10″ dans le ſphéroïde applati de $\frac{1}{330}$. D'après la Connoiſſance de temps de 1787, j'avois ſuppoſé 14′; par là le lieu de la Lune ſe trouve trop avancé de 33″ environ par rapport à Vénus: ainſi l'erreur des Tables en Longitude ſe réduit à 43″.

Pour la hauteur du Pole à Rochefort, ne pouvant accorder enſemble les différens auteurs que j'ai conſultés, j'avois pris le parti de la déterminer par la hauteur méridienne de Vénus obſervée à Rochefort par M. Romme & à l'école militaire par M. d'Agelet. Cette comparaiſon m'avoit donné 45°. 55′. 19″. M. Méchain m'a dit depuis qu'il la trouvoit de 45°. 56′. 19″, c'eſt à dire plus forte de 1′. Cette inexactitude ne ſauroit produire d'erreur ſenſible ſur les parallaxes, ainſi je ne me ſuis pas donné la peine de recommencer mes calculs.

Obſer-

Obſervations à Marſeille.

1.) Immerſion du 1er bord - - 11^h. 58′. 51″
2.) Seconde Corne - - - - 11. 59. 45
3.) Émerſion du 1er bord - - 1. 8. 51
4.) Émerſion de la ſeconde Corne 1. 9. 49.

Reſultats

Obſervations.		Différ. des méridiens	Erreur en Longitude.	Erreur en Latitude.
1 & 3	donnent - -	12′. 4″	37″	42″
2 & 4	- - -	12. 1	35	39
2 & 3	- - -	12. 2,5	36	38
	Milieu	12. 2,5	+ 36	+ 39,7

Ces obſervations ſont celles qui s'accordent le mieux avec celles de M. Méchain, l'erreur des Tables eſt la même à 1 ou 2″ près. La différence des méridiens approche auſſi de celle que l'on ſuppoſe ordinairement & qui eſt de 12′. 9″.

L'erreur des Tables qui ſe déduit des obſervations de M. Méchain tient auſſi à 1″ près le milieu entre toutes celles que j'ai conclues des autres obſervations, du moins en corrigeant celles de Malthe & de Rochefort, comme il a été dit ci-deſſus.

On peut donc regarder comme une choſe presque ſûre que les Tables repréſentoient la Lune trop avancée de 38 à 39″ par rapport à Vénus & donnoient auſſi la Latitude trop

forte de 36 à 37″ rélativement à celle de Vénus; & comme la Latitude apparente de la Lune étoit la plus foible, l'erreur des Tables diminuoit la diſtance des centres.

Pour connoitre l'erreur abſolue des Tables de Vénus & de la Lune, voici des obſervations faites par M. d'Agelet à l'école militaire.

	Paſſage au méridien		Diſtances au Zénith.	
Centre de Vénus	$4^h.\ 13'.\ 47'',5$	$-7'',5$	$22°.\ 57'.\ 45'',5$	
Bord de la Lune -	4. 17. 5 ,25		22. 54. 30	
α des Gémeaux - -	7. 19. 31 ,5	$-7\ ,5$	16. 31. 48	,5
Procyon - - -	7. 26. 43	$-5\ ,5$	43. 6. 10	
β des Gémeaux -	7. 30. 49 ,5	$-7\ ,4$	20. 20. 30	
β des Gémeaux le 11.	7. 30. 51 ,25	$-7\ ,4$	20. 20. 29	,5

Il paroit d'après les obſervations de α & β des Gémeaux que les diſtances au Zénith ſont trop fortes de $1'.\ 43'',5$. L'obſervation de Procyon donne $2'.\ 19''$, mais je crois que cette étoile a un mouvement propre d'environ $1''$ par année vers le Sud: du moins c'eſt ce que je trouve par la comparaiſon des Déclinaiſons de cette étoile, telle qu'on la tire des catalogues de la Caille, Mayer & Maskelyne. Ce ſoupçon eſt encore confirmé par le témoignage de M. le Monnier, qui établit le mouvement annuel en Déclinaiſon de $8'',69$; (*) quoique d'après l'Aſcenſion droite il ne dût être que de $7'',35$. Si nous adoptons le mouvement particulier de

(*) Suivant M. le Monnier (Aſtronomie Nautique p. 91.) le mouvement annuel en déclinaiſon eſt $9'',8$ au lieu de $7'',40$: le mouvement propre ſeroit donc $2'',4$.

de 1″, la correction des distances au Zénith se réduit à 1′. 44″; avec cette correction la distance vraie de Vénus au Zénith est 22°. 56′. 20″. & la Déclinaison 25°. 54′. 45″.

La pendule retarde de 1″,75 par jour; c'est à dire que la révolution des Fixes est de 23^h. 59′. 58″,25, & par un milieu entre les passages des trois étoiles je vois que les Ascensions droites en temps, données par la pendule sont trop foibles de 1′. 29″,4: ainsi l'Ascension droite de Vénus est de 4^h. 15′. 9″,4 = 63°. 47′. 21″. De là en supposant l'obliquité de l'écliptique 23°. 28′. 13″, je conclus la Longitude Géocentrique apparente - 2^s. 6°. 30′. 50″ & la Latit. 4°. 33′. 25″. B

Les secondes Tables de M. de la Lande donnent	2. 6. 30. 32	4. 33. 8
L'erreur des Tables est donc	18	17
L'erreur rélat. a été trouvée ci-dessus	38	37
Le lieu calculé de la Lune doit donc être diminué de	20″	20″

Si l'observation de la Lune au méridien eût été complete, nous aurions eu probablement une confirmation du resultat que nous venons d'obtenir. Au reste l'incertitude de l'observation ne portant que sur la Déclinaison, elle affectera principalement la Latitude, ainsi j'ai trouvé que la Longitude des Tables devoit être diminuée de 17″. Cet accord est aussi grand qu'on puisse le souhaiter.

Occultation de la 43e étoile d'Ophiucus le 27 Avril 1785. n. s.

La Longitude de cette étoile eſt trop foible de 10′ dans le catalogue de Bradley, en conſéquence toutes les annonces de cette occultation étoient fautives. C'eſt ce qui m'a fait manquer de quelques ſecondes l'inſtant de l'émerſion: car lors de l'immerſion la Lune n'étoit pas encore viſible pour moi. Après avoir conſtamment attendu pendant 36′ à ma lunette ſans rien appercevoir, je quittai un inſtant pour relire l'annonce, & quand je me remis à obſerver, j'apperçus l'étoile qui venoit de ſortir de deſſous le disque. J'eſtimai que l'émerſion avoit eu lieu 4 à 5″ plutôt; c'eſt-à-dire à 13^h. 37′. 24″ ou 25″.

Voici l'obſervation de M. Méchain:

Immerſion - - - - - - - - 13^h. 1′. 58″.

un peu douteuſe à cauſe de l'ondulation du bord éclairé de la Lune.

Émerſion - - - - - - - - 13. 37. 21.

Obſervation faite à Marſeille 2″½ de temps à l'orient de l'obſervatoire de cette ville.

Immerſion douteuſe à cauſe d'un petit nuage 13^h. 10′. 40″.

Émerſion certaine - - - - - - 13. 58. 7.

J'en ai conclu la conjonction à Paris à 13^h. 54′. 58″. t. v.

La différence des Méridiens — 12′. 30″. La correction des Tables en Longitude — 6″ & en Latitude — 33″.

En-

Enſuite rejettant les deux immerſions comme douteuſes & retranchant 33″ de la Latitude des Tables, j'ai trouvé la différence des méridiens — 12′. 9″; (*) telle qu'on la ſuppoſe ordinairement & le temps vrai de la conjonction 13ʰ. 55′. 9″.

Le 11 Septembre, cette étoile fut eclipſée de nouveau. J'obſervai l'immerſion à 7ʰ. 5′. 1″. temps vrai de l'obſervatoire Royal: un petit nuage me cacha l'étoile environ 4′ avant l'immerſion, je la voyois par degrés perdre ſon éclat; mais quand elle diſparut pour la ſeconde fois ce fut en un inſtant: quelque attention que je fiſſe je ne pus voir le bord obſcur de la Lune.

À l'inſtant de l'émerſion la Lune qui étoit fort peu élévée, n'étoit plus viſible pour moi.

Le 11 Octobre à 8ʰ. 54′. 25″. temps moyen de l'obſervatoire, j'ai obſervé l'immerſion d'une petite étoile vers le milieu du disque obſcur de la Lune. J'ai ſuivi la Lune pendant une heure ſans révoir l'étoile; alors la Lune a ceſſé d'être viſible pour moi. M. Méchain a obſervé l'immerſion à la même ſeconde.

(*) Si l'on veut la différence des méridiens pour l'obſervatoire de Marſeille, on retranchera 2″,5 & l'on aura — 12′. 6″,5. Or cette différence eſt de 12′, 6″,8, au clocher des Accoules vers le milieu de la ville.

Les Tables de Mayer donnent pour le temps de l'obſervation :

Longit. app. ☾ - $9^s.24^\circ.35'.36''$. Lat. app. $2^\circ.1'.36''$. A je ne vois l'étoile dans aucun catalogue.

La 811e de Mayer étoit en $9^s.25^\circ.22'.9''$. - $2^\circ.7'.27''$. A elle a du être éclipſée un peu plus tard: une autre l'avoit été probablement un peu plutôt. Ces trois étoiles m'ont paru de même grandeur: la 811e de Mayer eſt marquée de la 8e grandeur.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Methodus facilis inueniendi Integrale huius formulae:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos.\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos.\theta + 1},$$

casu quo post integrationem ponitur vel $x = 1$ vel $x = \infty$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

La méthode que l'illustre Euler a mise en usage pour trouver l'intégrale de la formule annoncée dans le tître de ce mémoire, est celle qu'on employe ordinairement dans l'intégration de cette espèce de fractions, savoir de les transformer en fractions partielles, selon les facteurs du dénominateur, & d'intégrer chacune de ces fractions simples séparément. Mais pour peu qu'on considère avec attention la formule en question, quiconque connoît l'esprit de cette méthode, sera peutêtre surpris de la voir mise en usage pour l'intégration d'une formule aussi compliquée, & s'attendra ou à des résultats plus compliqués encore, ou, s'il en appercoît la simplicité, il s'attendra à des artifices de calcul peu communs & capables de répandre de l'intérêt sur une sujet qui en paroît d'abord peu susceptible ; & c'est effectivement ce qui fait le prix de ce mémoire.

L'Auteur commence par donner à ſa formule la forme $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - 2 \text{ cof. } \zeta + x^{-p}}{x^n - 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}}$, qu'elle prend lorsqu'on diviſe le numérateur & le dénominateur par x^n, où le dénominateur eſt un produit de n facteurs ſimples trinomiaux de la forme $x^1 - 2 \text{ cof. } \omega + x^{-1}$; & la forme de chaque fraction partielle qui naît de la réſolution de la fraction propoſée, devient

$$\frac{2 (\text{cof. } p\,\omega - \text{cof. } \zeta)}{n \text{ ſin. } \theta} \cdot \frac{\text{ſin. } \omega}{x^1 - 2 \text{ cof. } \omega + x^{-1}},$$

les valeurs de l'angle ω étant au nombre de n, ſavoir: $\frac{\theta}{n}$; $\frac{\theta + 2\pi}{n}$; $\frac{\theta + 4\pi}{n}$ . . . . . $\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$. En multipliant donc chacune de ces fractions par $\frac{\partial x}{x}$, & mettant après l'intégration $x = 1$, l'intégrale de la formule propoſée devient $\frac{Q}{n \text{ ſin. } \theta} - \frac{R \text{ cof. } \zeta}{n \text{ ſin. } \theta}$, les valeurs de Q & R étant

$$R = \frac{n\pi - \theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-4)\pi - \theta}{n} + \text{ &c.;}$$

$$Q = \frac{n\pi - \theta}{n} \text{ cof. } \frac{p\theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} \text{ cof. } \frac{p}{n}(\theta + 2\pi) + \text{ &c.;}$$

où il eſt d'abord clair que $R = \pi - \theta$, de ſorte que tout revient à déterminer la ſomme de la ſérie Q.

Pour cet effet l'Auteur conſidère les deux ſéries ſuivantes de n termes:

$$t = \text{cof. } (\alpha + 2\beta) + \text{cof. } (\alpha + 4\beta) \text{ . . . . . } + \text{cof. } (\alpha + 2n\beta)$$

$$u = \text{cof. } (\alpha + 2\beta) + 2 \text{ cof. } (\alpha + 4\beta) \text{ . . . . } + n \text{ cof. } (\alpha + 2n\beta)$$

dont il lui eſt facile de trouver les ſommes par des transformations & combinaiſons tirées des principes de ſon calcul des ſinus. Enſuite il conſidère cette progreſſion formée des deux précédentes:

$$V = (a + b) \text{ cof. } (\alpha + 2\beta) + (a + 2b) \text{ cof. } (\alpha + 4\beta) + \text{ . . . . . } + (a + nb) \text{ cof. } (\alpha + 2n\beta)$$

de

de manière que $V = at + bu$, ce qui, les ſommes des progreſſions t & u étant trouvées, lui fournit la ſomme V. Or en comparant entre elles les progreſſions V & Q on peut déterminer les quantités a, b, α, β, & on parvient enfin à cette expreſſion: $Q = \frac{\pi \text{ ſin. } \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{\text{ſin. } \frac{p\pi}{n}}$, de façon que l'intégrale cherchée ſera pour $x = 1$:

$$\frac{\pi \text{ ſin. } \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \text{ ſin. } \theta \text{ ſin. } \frac{\pi p}{n}} - \frac{(\pi - \theta)\cos. \zeta}{n \text{ ſin. } \theta},$$

& deux fois plus grande, lorsqu'après l'intégration on met $x = \infty$.

Il y a à faire les remarques ſuivantes par rapport à cette intégration.

1°.) L'expoſant p doit être plus petit que l'expoſant n; car autrement la fraction propoſée ſeroit une fraction impropre: elle contiendroit des parties entières dont il faudroit chercher ſéparément l'intégrale & l'ajouter à l'intégrale trouvée d'après la méthode expoſée ici. (Cette opération ſe trouve détaillée dans le mémoire ſuivant).

2°.) Les opérations par lesquelles on eſt parvenu à l'intégrale de la formule propoſée, ne ſauroient avoir lieu, à moins que l'expoſant p ne ſoit un nombre entier. Cependant M. Euler fait voir que les cas où l'expoſant p eſt une fraction quelconque, peuvent toujours être reduits à d'autres où les expoſans ſont des nombres entiers; & que par conſéquent cette circonſtance ne change rien aux réſultats; mais que, quel que ſoit le nombre p, entier ou fractionnaire, pourvu que $p < n$, l'intégrale reſte comme elle a été aſſignée.

3°.) On peut même donner à cet exposant p une valeur imaginaire, pourvu qu'elle soit telle que la formule différentielle reste réelle. Ainsi, en mettant $p = q\sqrt{-1}$, la formule à intégrer devient $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cos. } q\, l\, x}{x^n - 2\,\text{cos. }\theta + x^{-n}}$, dont l'intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est

$$\frac{\pi}{n\,\text{sin. }\theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$$

& deux fois plus grande pour les termes d'intégration $x = 0$ & $x = \infty$; vérité de laquelle, comme l'Auteur ajoute, il seroit difficile de donner une démonstration directe.

Ces remarques sont suivies de quelques autres très-propres à répandre du jour tant sur cette intégration que sur bien d'autres, & qui tendent toutes à démontrer que l'intégrale, telle qu'elle a été trouvée, est vraye, quelles que soyent les valeurs de p, n & θ, soit entieres, rompues, ou même imaginaires, les seuls cas exceptés où $p - n$ est une quantité positive & réelle.

II.

De summo vsu Calculi Imaginariorum in Analysi.

Auctore *L. Eulero*, p. 25.

Les Géomètres de nos jours connoissent suffisamment la grande utilité du Calcul des Imaginaires ; ils savant combien il a contribué à l'avancement de l'Analyse, & que dans l'intégration des formules différentielles fractionnaires, qui se fait par la résolution en fractions partielles ayant des dénominateurs en partie imaginaires,

ginaires, on ne ſauroit ſe paſſer de ce calcul. Feu M. Euler avoit fait, à la verité, quelques tentatives de dégager l'intégration des formules rationnelles de tout emploi des Imaginaires, & quoiqu'il y aît réuſſi en partie, le ſuccès n'avoit pas été parfaitement heureux dans les cas, où le dénominateur a deux ou pluſieurs facteurs égaux. On ne ſauroit donc ſe paſſer entièrement des Imaginaires & on rencontre parfois des formules intégrales qui paroiſſent ſe réfuſer à toute voye d'intégration, à moins qu'on n'aît recours aux Imaginaires. C'eſt ce que l'Auteur ſe propoſe de montrer par un nouvel exemple frappant dans le cours de ce mémoire.

Le Cas que M. Euler a choiſi pour cet effet lui a été fourni par le mémoire précédent. Car ayant trouvé $\frac{\pi \text{ ſin.} \frac{\theta\pi}{n}}{n \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} \frac{p\pi}{n}}$ pour l'intégrale de $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 \text{ cof.} \theta + x^{-n}}$, priſe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, il obſerve qu'en gardant les mêmes termes d'intégration, on peut déduire de là

$$\int \frac{\partial x}{x l x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2 \text{ cof.} \theta + x^{-n}} = \frac{\pi}{n \text{ ſin.} \theta} \int \frac{\partial p \text{ ſin.} \frac{\theta\pi}{n}}{\text{ſin.} \frac{p\pi}{n}},$$

p étant regardé comme une quantité variable, & l'intégrale priſe de manière qu'elle évanouiſſe en mettant $p = 0$. Et c'eſt l'intégration de cette formule, ou bien, pour éviter les fractions, de celle-ci: $\int \frac{\partial \Phi \text{ ſin.} m\Phi}{\text{ſin.} n\Phi}$, qui fait le ſujet de ce mémoire.

L'Auteur commence par dégager cette expreſſion des quantités angulaires, en mettant $t = \text{cof.} \Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin.} \Phi$ & $u = \text{cof.} \Phi - \sqrt{-1} \text{ ſin.} \Phi$, ce qui le conduit à cette expreſ-

ſion purement algébrique: $\frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$, pour l'intégration de laquelle il faut ſoigneuſement diſtinguer les cas où l'expoſant m ſurpaſſe n, des cas où le contraire arrive, vu que dans le premier cas la fraction eſt impropre & contient des entiers dont il faut avant tout déterminer les intégrales, ce qui étant fait, le reſte ſe reduit à trouver l'intégrale de la formule propoſée pour les cas où l'expoſant n eſt plus grand que m.

Pour cette intégration M. Euler met en uſage la méthode qu'il a employée avec ſuccès dans le mémoire precédent, ſavoir la réſolution en fractions partielles par la décompoſition du dénominateur en n facteurs ſimples trinomiaux de la forme $t^1 - 2\,\text{cof.}\,\omega + t^{-1}$, qui donnent autant de fractions partielles à intégrer, chacune de la forme

$$\frac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\,\omega}{n\,\text{cof.}\,n\,\omega} \times \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{t^1 - 2\,\text{cof.}\,\omega + t^{-1}},$$

les n valeurs de l'angle ω étant $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots\ldots \frac{i\pi}{n}$.

Mais comme l'intégration de chacune de ces fractions partielles, quoique très-facile, mène à un arc imaginaire qu'il faudroit reduire à des quantités réelles, pour s'épargner cet embarras l'Auteur fait rentrer ſon angle Φ dans le calcul, ce qui étant fait, l'intégrale partielle en queſtion, à cauſe de $\frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} = \partial\Phi$ & $t^1 + t^{-1} = 2\,\text{cof.}\,\Phi$, prend cette forme: $-\frac{\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\,\omega}{n\,\text{cof.}\,n\,\omega} \cdot \frac{\partial\Phi}{\text{cof.}\,\Phi - \text{cof.}\,\omega}$, de façon qu'il ne reſte plus qu'à trouver l'intégrale de $\frac{\partial\Phi}{\text{cof.}\,\Phi - \text{cof.}\,\omega}$, que M. Euler trouve d'une manière très-aiſee

$$= \frac{1}{\text{ſin.}\,\omega} l \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(\omega + \Phi)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(\omega - \Phi)}.$$

La

La forme générale des intégrales partielles qui compoſent l'intégrale complette de la formule propoſée ſera donc

$$-\frac{\text{ſin. } m\,\omega}{n \text{ coſ. } n\,\omega} \int \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2}(\omega+\Phi)}{\text{ſin. } \frac{1}{2}(\omega-\Phi)},$$

ou bien, ce qui revient au même, en mettant $\frac{\pi}{n} = 2\alpha$ & $\Phi = 2\psi$, on aura

$$\int \frac{2\,\partial\psi \text{ ſin. } 2\,m\,\psi}{n \text{ ſin. } 2\,n\,\psi} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\text{ſin. } 2\,m\,\alpha}{n} \int \frac{\text{ſin. } (\alpha+\psi)}{\text{ſin. } (\alpha-\psi)} \\ -\frac{\text{ſin. } 4\,m\,\alpha}{n} \int \frac{\text{ſin. } (2\,\alpha+\psi)}{\text{ſin. } (2\,\alpha-\psi)} \\ +\frac{\text{ſin. } 6\,m\,\alpha}{n} \int \frac{\text{ſin. } (3\,\alpha+\psi)}{\text{ſin. } (3\,\alpha-\psi)} \end{array} \right\} \text{ &c.}$$

où le nombre des termes eſt $n-1$ & $\psi < \alpha$.

Ayant donc trouvé une expreſſion finie pour l'intégrale de $\frac{\partial p \text{ ſin. } \frac{\theta p}{n}}{\text{ſin. } \frac{\pi p}{n}}$, on pourra auſſi aſſigner, par une expreſſion finie, l'intégrale de la formule $\int \frac{\partial x}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2 \text{ coſ. } \theta + x^{-n}}$, toutes les fois que l'angle θ eſt à π dans un rapport rationnel, c'eſt à dire $\theta : \pi = \mu : \nu$, ou bien $\nu = \frac{\mu\,\pi}{\theta}$. En mettant donc $\frac{p}{n} = r$ & $\frac{\pi}{2\nu} = \varrho$, la forme générale de toutes les parties dont l'intégrale de la formule propoſée eſt compoſée, ſera $\pm \frac{\text{ſin. } i\,\theta}{\text{ſin. } \theta} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(i+r)}{\text{ſin. } \varrho(i-r)}$. Mais comme de cette manière le nombre des termes peut être reduit à la moitié, pour faciliter cette contraction l'Auteur diſtingue quatre cas, ſelon que les nombres μ & ν ſont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair, & il finit ſon mémoire par quelques exemples propres à éclaircir cette intégration remarquable.

III.

III.
Specimen ſingulare Analyſeos Infinitorum indeterminatae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 47.

Parmi le grand nombre de découvertes dont les ſciences mathématiques ſont redevables à l'immortel Euler, la méthode de réſoudre, par une voye directe, des Problèmes de l'Analyſe infinitéſimale analogues à ceux que la méthode de Diophante enſeigne à réſoudre dans l'Algèbre, ne tient pas la derniere place. Les Géomètres ſavent quelle grande ſenſation a faite, en ſon tems, le Problème propoſé & réſolu par Hermann, de trouver une courbe algébrique non-rectifiable, mais dout la rectification dépende de la quadrature d'une courbe donnée, douée de tant qu'on voudroit d'arcs rectifiables; ils ſavent que feu M. Euler a été le premier à réſoudre ce Problème d'une manière directe dans un mémoire intitulé: *De methodo Diophanteae analoga in Analyſi Infinitorum*, qu'on trouve dans le Tome cinquième des nouveaux Commentaires de notre Académie, & dans lequel il a jetté les premiers fondemens de ce nouveau Calcul & expoſé la ſolution de quantité de Problèmes relatifs à cette méthode & réſolus directement par le moyen de ſes nouveaux principes.

Cependant le Problème le plus général qu'on peut réſoudre par le moyen de cette nouvelle méthode, c'eſt de trouver une telle relation algébrique entre les deux quantités variables x & y, que toutes ces formules intégrales: $\int P\,\partial y$, $\int Q\,\partial y$, $\int R\,\partial y$, &c. obtiennent des valeurs algébriques, & qu'une ou deux d'entr'elles renferment des quadratures données, les lettres P, Q, R marquant des fonctions quelconques don-

données de x. Mais quoique ce cas paroiſſe être d'une grande généralité: il eſt reſtreint par la condition que la variable y ne doit avoir, dans ces formules, qu'une ſeule dimenſion; & toutes les fois que le Problème indéterminé qu'on traite n'eſt pas réductible à de pareilles formules, la méthode de M. Euler, expoſée dans le mémoire cité, eſt inſuffiſante; & il avoue ici lui même qu'il ne voit pas comment tenter ſeulement la ſolution des cas qui ne ſont pas contenus dans les formules mentionnées. Il en allègue pour exemple les deux formules ſi ſimples $\int \frac{y\partial x}{x}$ & $\int \frac{\partial x}{yx}$, dont on ne voit pas comment trouver l'intégrale, à moins qu'on ne prenne pour y une puiſſance quelconque de x, quoi qu'il y ait lieu de préſumer que ce ne ſoit pas la ſeule ſolution poſſible.

La perfection de ce genre de calcul paroît donc promettre une riche recolte de vérités nouvelles & de nouveaux moyens de réſoudre pluſieurs Problèmes qui jusqu'ici ſe ſont refuſés à tous les efforts des Géomètres. C'eſt de là que dépend, par exemple, la démonſtration complette des deux Théorèmes, dont feu M. Euler avoit tâché de montrer la vérité dans ſes Opuscules Analytiques T. II. page 82 & ſuiv. ſavoir: 1°.) Qu'à l'exception du cercle il n'y ait point de courbe algébrique dont chaque arc puiſſe être exprimé par un arc de cercle; & 2.) Qu'il n'y ait point de courbe algébrique dont les arcs puſſent être exprimés ſimplement par des logarithmes. De même la recherche des lignes rectifiables tirées ſur une ſurface courbe donnée, ſoit convexe ou concave, eſt ſujette à de grandes difficultés qu'on ne ſurmontera apparemment jamais ſans le ſecours de ce nouveau genre de calcul mieux perfectionné, c'eſt pourquoi l'Auteur invite tous les Geomètres à s'appliquer à cette partie de l'Analyſe.

La ſolution du Problème qui fait le ſujet du préſent mémoire eſt très propre à repandre quelque jour ſur ce genre ténébreux de calcul, quoi qu'elle ſoit extrèmement indirecte. Il s'agit de trouver une telle relation entre les variables q & z, que la formule $\int q\,\partial z$ devienne algébrique, & que la formule $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ exprime un arc de cercle. Comme la dernière condition eſt la plus difficile à remplir, l'Auteur commence par là, en mettant $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.}\,\frac{x}{y}$, d'où, en prenant les différentielles & mettant $xx+yy=zz$, il déduit $\sqrt{(qq-1)} = \frac{y\,\partial x - x\,\partial y}{x\,\partial x + y\,\partial y}$ & $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, où $p = \frac{\partial y}{\partial x}$. De cette manière les deux quantités variables q & z ſont déterminées par deux autres x & y, & la dernière condition eſt remplie. Pour ſatisfaire à l'autre condition, comme $q\,\partial z = \partial x \sqrt{(1+pp)}$ & $\partial y = p\,\partial x$, tout ſe reduit à rendre algébriques ces deux formules: $y = \int p\,\partial x$ & $\int q\,\partial z = \int \partial x \sqrt{(1+pp)}$. Or

$$\int p\,\partial x = px - \int x\,\partial p;$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = x\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{1+pp}};$$

où les deux dernières formules ſont contenues dans celles que M. Euler a enſeigné à rendre algébriques dans le Problème général dont nous avons fait mention. Cependant il donne ici une double ſolution de ces deux formules, l'une par les irrationnelles, l'autre par des expreſſions dégagées de l'irrationalité.

Quoique cette méthode de réſoudre le Problème ſoit très indirecte, & due uniquement à la circonſtance que la ſolution en étoit déjà connue d'avance: elle peut neanmoins donner aux Géomètres l'occaſion de perfectionner ce nouveau genre de calcul ſi propre a reculer les bornes de l'Analyſe & c'eſt dans cette eſpérance principalement que M. Euler à communiqué cette ſolution.

IV.

IV.

De lineis rectificabilibus in ſuperficie ſphaeroïdica quacunque geometrice ducendis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 57.

Comme ſur la ſurface du cylindre, le plus ſimple des corps terminés par des ſurfaces courbes, on ne peut tirer aucune ligne rectifiable, à l'exception de la droite parallèle à l'axe, on dévroit croire qu'à plus forte raiſon il ſeroit impoſſible de tirer ſur la ſurface du cone des courbes dont tous les arcs puſſent être exprimés algébriquement. Neanmoins M. Euler a montré, dans un mémoire: *De curuis rectificabilibus in ſuperficie coni recti ducendis* (Acta Acad. Sc. pro Anno 1781. P. I.) que ſur la ſurface des cones droits, dont les côtés ſont au diamètre de la baſe dans un rapport rationel, on peut tirer une infinité de lignes rectifiables.

De même, malgré tous les efforts des Géomètres, ſans en excepter la derniere tentative de M. Euler: *De curua rectificabili in ſuperficie ſphaerica* (Nou. Comment. T. XV.) on n'a pu découvrir jusqu'ici d'autres lignes rectifiables tirées ſur la Sphère que la ſeule Epicycloïde engendrée par le mouvement d'un grand cercle ſur un petit cercle de la Sphère, dont le rayon eſt au rayon de la Sphère dans un rapport rationel. On devroit donc croire qu'il ſeroit encore plus difficile de trouver une ligne rectifiable ſur la ſurface d'un Sphéroïde, vu que les arcs elliptiques paroiſſent devoir mettre obſtacle à cette recherche. Cependant l'Auteur de ce mémoire a trouvé un Théorème, moyennant lequel la ſolution du Problème pour la Sphère devient non-ſeulement très-plane & très-facile; mais

qui l'a mis auſſi en état de trouver ſur la ſurface d'un Sphéroïde quelconque des lignes rectifiables.

Le Théorème qui a rendu à M. Euler ce grand ſervice eſt que, ſi v marque une fonction quelconque de l'angle Φ, que fait la normale d'une courbe avec ſon axe des abſciſſes, & dont l'élément de l'arc eſt

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \partial . \frac{\partial v}{\partial \Phi},$$

les ordonnées de la courbe puiſſent être exprimées de cette manière :

$$x = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \text{ſin. } \Phi - v \text{ cof. } \Phi;$$
$$y = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \text{cof. } \Phi + v \text{ ſin. } \Phi;$$

de façon que, ſi v fût une fonction algébrique, pas de l'angle Φ, mais de ſa tangente t, les ordonnées x & y ſeroient exprimées par des fonctions algébriques de t & partant la courbe algébrique & même rectifiable. À l'aide de ce Théorème, muni d'une démonſtration très-élégente, il eſt aiſé d'aſſigner une infinité de courbes algébriques non-ſeulement rectifiables, mais dont la rectification dépend d'une quadrature donnée.

Après avoir donné ce Théorème, M. Euler procède à la ſolution du Problème de trouver des lignes rectifiables ſur la ſurface d'un Sphéroïde dont l'axe eſt à l'Équateur comme $c : 1$; & comme l'élément d'une ligne tirée ſur la ſurface de ce Sphéroïde eſt $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$, x, y & z étant les trois ordonnées : il eſt clair que tout ſe reduit à trouver une telle relation entre x & y, que cette expreſſion devienne intégrable. Mais comme il eſt impoſſible d'effectuer cela en général, l'Auteur ſe borne à un cas particulier, en mettant

$$s = nz,$$

$s = nz$, & à l'aide de cette réſtriction & du Théorème mentionné il parvient à trouver des lignes rectifiables qu'on peut tirer ſur la ſurface d'un Sphéroïde & qui ont la propriété que leur projection faite ſur le plan de l'Équateur eſt la même, ſoit que le Sphéroïde ſoit applâti ou allongé ; de ſorte que cette ſolution ne diffère en rien de celle qu'on a donné pour la ſurface de la Sphère, & que, puiſque la lettre c qui détermine l'eſpèce du Sphéroïde elliptique, ſort du calcul, cette ſolution a auſſi lieu pour les ſurfaces des Conoïdes hyperboliques.

V.

De ſuperficie coni ſcaleni, vbi imprimis ingentes difficultates, quae in hac inueſtigatione occurrunt, perpenduntur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 69.

Le titre de ce mémoire annonce aſſez clairement ce qu'on y doit attendre: une expoſition des difficultés, dont ce ſujet, traité avec peu de ſuccès par pluſieurs Géomètres, eſt enveloppé, plutôt qu'une ſolution complette & ſatisfaiſante de ce Problème. En nommant la hauteur du cone a, ſon obliquité, ou bien la diſtance du centre à la perpendiculaire tirée du ſommet ſur le plan prolongé de la baſe $= b$, le rayon de la baſe $= c$ & la ſurface d'une portion infiniment-petite de la ſurface du cone compriſe entre un arc de la baſe $c\,\partial\,\Phi$ & les deux côtés du cone $= \partial S$, cette ſurface eſt exprimée ainſi: $\partial S = \frac{1}{2} c\,\partial\,\Phi \sqrt{aa + (c + b \cos.\Phi)^2}$, comme on ſait par le mémoire de feu M. Euler: *De ſuperficie conorum ſcalenorum aliorumque corporum conicorum*, qui ſe trouve dans le premier

volume des Nouveaux Commentaires, où le Problème eſt reduit à la même expreſſion. Mais ayant reduit alors la ſurface du cône à la rectification d'une courbe algébrique du ſixième degré, il employe ici la voye de l'approximation, en transformant l'expreſſion irrationelle en ſérie. Il met, pour cet effet $aa + \frac{1}{2}bb + cc = ff$ & $2bc \cos.\Phi + \frac{1}{2}bb \cos. 2\Phi = v$, de façon que $\partial S = \frac{1}{2} c\, \partial\Phi \sqrt{ff + v}$ &

$$\sqrt{ff + v} = f + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{v}{f} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{v\,v}{f^3} + \text{&c.}$$

& il aſſigne la valeur de la ſurface S pour les deux, trois & quatre premiers termes de cette ſérie, où la dernière expreſſion, compoſée des quatre premiers termes, eſt aſſez approchante, pourvu que f ſoit conſidérablement plus grand que b & c.

Une autre approximation déduite de la transformation du radical $\sqrt{aa + (c + b \cos.\Phi)^2}$ en ſérie, donne une loi de progreſſion plus manifeſte. L'Auteur ne la pouſſe cependant que jusqu'à la ſomme de quatre termes; mais il fait voir comment on peut la pouſſer plus loin, & il donne à la fin de ſon mémoire cette expreſſion pour la ſurface entière du cone: $\pi\, a\, a\, x\, u\, .\, V$, où $x = \frac{c}{a}$ & $u = \sqrt{1 + x\,x}$ & V une ſérie dont la loi de progreſſion eſt évidente, mais qui n'eſt d'aucun uſage lorsque l'obliquité du cone n'eſt pas très-petite en comparaiſon de la hauteur du cone & du rayon de ſa baſe.

Une grande difficulté ſe préſente lorsqu'on cherche la ſurface d'un cone oblique dont la hauteur eſt très-petite. Car alors la ſérie qui exprime le radical $\sqrt{aa + (c + b \cos.\Phi)^2}$, devient

$$c + b \cos.\Phi + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{aa}{c + b \cos.\Phi} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{a^4}{(c + b \cos.\Phi)^3} + \text{&c.}$$

&

& cette série est très-convergente, lorsque la hauteur a est très-petite par rapport à $c + b \cos. \Phi$; mais comme parmi les valeurs de l'angle Φ, il y en a où $\cos. \Phi = -\frac{c}{b}$, & partant $c + b \cos. \Phi = 0$, tous les termes après le premier deviennent infiniment grands & s'écartent par conséquent enormément de la vérité, inconvenient que l'Analyse n'a pas encore réussi à lever. Dans tous ces cas il faudra donc recourir à la dimension pratique, en partageant toute la surface du cone en plusieurs parties, & chercher la surface de chacune séparément.

Pour faciliter cette opération l'Auteur cherche la figure qui nait du développement de la surface du cone en surface plane, ce qui le mène à une courbe transcendante qu'on ne peut exprimer ni par des logarithmes, ni par des arcs de cercle, mais dont neanmoins M. Euler est en état d'assigner quelques propriétés remarquables. D'ailleurs comme elle peut être représentée par le développement d'un papier appliqué à la surface du cone, elle fournit un nouvel exemple d'une courbe hyperscendante dont la construction mécanique est très-facile.

VI.

De proprietatibus quibusdam Ellipseos in superficie sphaerica descriptae.

Auctore *Nicolao Fuss*, pag. 90.

Ce mémoire est en quelque façon une suite de celui que le même Auteur a donné dans le second Tome des nouveaux Actes de l'Académie sous les titre: *Problematum quorundam*

dam ſphaericorum Solutio, où l'on trouve entre autres le Problème de conſtruire, ſur un arc de grand cercle de la Sphère donné, un triangle dont le ſommet ſe trouve dans un autre grand cercle & dont la ſomme des deux côtés ſoit un Minimum. Ce Problème avoit déjà donné alors à M. Fuſs l'idée de réſoudre une autre queſtion analogue, ſavoir de conſtruire ſur une baſe donnée un triangle tel que la ſomme des deux autres côtés ſoit conſtante. Mais comme cette recherche lui avoit d'abord fournie différentes propriétés analogues à des propriétés de l'Ellipſe plane, il a trouvé plus convenable de traiter ce ſujet apart.

Il ſuppoſe donc ici qu'un fil dont la longueur $= 2c$ ſoit fixé par ſes deux extrémités dans deux points de la ſurface ſphérique diſtans, l'un de l'autre, d'un arc de grand cercle $= 2a$; & qu'en tendant ce fil par le moyen d'un ſtile, on décrive ſur la Sphère, par un mouvement continu du ſtile, une ligne courbe, tout comme on décrit l'Ellipſe ſur le plan. En prenant les abſciſſes de cette courbe ſur le grand cercle paſſant par les points où les extrémités du fil ſont attachées & du milieu de ces deux points, ſi l'on nomme l'abſciſſe x & l'ordonnée y, on parvient par le moyen de quelques transformations & reductions aſſez connues dans le calcul des ſinus, à cette équation:

$$\text{tang.}\, y = \frac{\sqrt{(\text{ſin.}\, c^2 - \text{ſin.}\, a^2)(\text{ſin.}\, c^2 - \text{ſin.}\, x^2)}}{\text{ſin.}\, c\ \text{coſ.}\, c}.$$

L'application de cette expreſſion à un cas particulier, où la longueur du fil eſt égale à la demi-circonférence de la Sphère, mène à des concluſions qui, au premier coup d'oeil, paroiſſent difficiles à concilier avec la nature du Problème; mais l'Auteur en diſſipe les doutes & déduit de cette conſidération

ration une propriété remarquable, ſavoir que, ſi la longueur du fil eſt la moitié de la circonférence de la Sphère, quelle que ſoit la diſtance des deux points où ſes extrémités ſont fixées, la courbe décrite par le mouvement du ſtile eſt toujours un grand cercle de la Sphère.

Au reſte, en déſignant par la lettre g le demi-axe conjugé de cette Ellipſe ſphèrique, l'équation qui en exprime la nature devient tang. $y = \frac{tang.\, g}{ſin.\, c} \sqrt{(ſin.\, c^2 - ſin.\, x^2)}$.

Pour mieux approfondir la nature de cette courbe, l'Auteur en examine la projection faite ſur le plan du grand cercle dont le centre de l'Ellipſe ſphérique eſt le pole, projection qui eſt une véritable Ellipſe, ſon équation étant

$$Y = \frac{G}{C}\sqrt{(C\,C - X\,X)},$$

où G marque le demi-axe conjugué, C le demi-axe traverſant, X l'abſciſſe priſe du centre & Y l'ordonnée, équation dont la liaiſon avec celle de l'Ellipſe ſphérique eſt évidente.

VII.

Annotationes ad Theorema XVI. Lib. V. Pappi Alexandrini.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 100.

Les ouvrages de *Pappe d'Alexandrie*, qui ſont parvenus jusqu'à nos jours, contiennent la plupart des matieres, qui ne ſemblent guéres propres qu'à la méthode analytique; ce qui l'a empeché d'étendre ſes recherches auſſi loin qu'il l'auroit pu faire, s'il n'y eut pas employé la méthode géométrico-ſynthétique, comme tous les anciens Géométres. Comme cela

a deja ſouvent donné lieu aux Géométres modernes d'appliquer la méthode analytique à des ſujets, que *Pappe* avoit traités ſynthétiquement; l'auteur de ce mémoire l'a auſſi eſſayé ſur la propoſition de ce Géométre: „ *que parmi toutes les aires circulaires de la même circonference celle eſt la plus grande, qui appartient à un demi-cercle*: " Il a trouvé par le calcul, qu'en nommant Φ la moitié de l'angle repondant aux arcs d'une égale circonférence, l'aire compriſe entre cet arc & les rayons ſera un *maximum*, ſi cof. $\Phi = 0$, c'eſt à dire, ſi Φ eſt égale à un terme quiconque de cette ſerie: 90°, 270°, 450°, &c. & un *minimum*, ſi l'angle Φ eſt égal à ſa tangente, conſequemment ſi $\Phi = 0$; $\Phi = 257°.\,27'.\,12''.\,13'''$; $\Phi = 442°.\,37'.\,27''.\,32'''.$, &c. mais que dans le premier cas, parmi tous les termes de la ſerie le premier $\frac{1}{2}\pi$ donne la plus grande aire (& c'eſt ce juſtement qu'a démontré *Pappe*); & que dans le ſecond cas, hormis le premier terme $\Phi = 0$, où l'aire s'évanouit de même, les aires deviennent d'autant plus petites que l'angle Φ s'augmente.

L'Auteur a encore étendu le calcul à quelques autres cas. La ſuperficie d'un ſegment ſphèrique étant conſtante, l'hémiſphère eſt le plus grand de tous les ſegmens. Si l'on poſe conſtante la baſe d'un cone perpendiculaire, la ſuperficie de celui-ci croit à l'infini avec la hauteur du cone; mais le cone lui-même devient un *maximum*, ſi la hauteur eſt égale au rayon de la baſe multiplié par $\sqrt{2}$, c'eſt à dire, ſi les côtés du cone ſont inclinés à la baſe ſous l'angle 54°. 44'..., angle d'ailleurs très-remarquable dans les Mathématiques.

CLASSE

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

De viribus centripetis, ad curuas non in eodem plano ſitas deſcribendas, requiſitis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 111.

Le grand Newton a été le premier, comme on ſait, qui ait réſolu le problème, dans lequel on cherche la force centripète, tendante vers un point fixe donné, propre à faire décrire à un corps telle ligne courbe donnée. Mais comme dans l'énoncé de ce Problème on admet tacitement, & que même la nature de la choſe porte néceſſairement, que toute la courbe ſoit ſituée dans un même plan avec le centre de force, qu'on cherche; il s'en ſuit, que ſi la courbe décrite étoit à double courbure, ce mouvement ne pourroit pas provenir d'une ſeule force centripète, & qu'il faudroit ſtatuer au moins deux centres de forces différens. L'Auteur montre donc dans ce Mémoire, que quelle que ſoit la courbe décrite, ces deux centres de forces peuvent toujours être pris à volonté, & que delà on déterminera les deux forces centripètes, requiſes, pour faire parcourir au corps la courbe propoſée.

En effet, puisqu'en décompoſant le mouvement du corps en trois autres, parallèles aux trois axes pris à volonté pour les coordonnées de la courbe, on en déduit d'après la

méthode ordinaire trois équations pour les trois forces accélératrices requiſes; on tirera de ces équations les deux forces centripètes, qu'on cherche, & la viteſſe du corps dans chaque point de la courbe. Cette ſolution au reſte devient beaucoup plus ſimple & plus aiſée, en faiſant paſſer l'axe des abſciſſes par les centres de forces mêmes, & en prenant le commencement des abſciſſes à des diſtances égales de ces centres. Pour mettre enſuite cette matière dans un plus grand jour, il applique dans quelques Problèmes cette ſolution à différens exemples. Dans le premier il ſuppoſe que le corps ſe meuve ſur la ſurface d'un cylindre, & qu'on prenne les deux centres dans l'axe du cylindre; dans le ſecond il fait mouvoir le corps dans la ſurface d'une ſphère, dont les poles faſſent les deux centres de forces, & ici il dévéloppe encore particuliérement le cas, où la courbe décrite ſera la Loxodromique. Dans ces problèmes notre Auteur cherche donc toûjours tant les forces centripètes, que la viteſſe trajectoire du corps.

II.

De Motu trium corporum ſe mutuo attrahentium ſuper eadem linea recta.

Auctore *L. Eulero*, pag. 126.

Comme c'eſt le cas le plus ſimple du fameux Problème des trois Corps, quand les Corps ſont tous ſitués dans la même ligne droite, notre illuſtre Auteur le dévéloppe avec ſoin dans ce Mémoire; il peſe toutes les difficultés, qui empêchent, qu'on ne le puiſſe réſoudre, & il fait voir parlà, combien de progrés on a beſoin de faire encore dans l'Analyſe, avant que d'oſer entreprendre la ſolution de ce Problème, pris dans toute ſa généralité.

On

On voit d'abord que la ſolution Phyſique du Problème n'a pas la moindre difficulté, & les trois équations différentielles requiſes pour le mouvement des trois corps ſe préſentent pour ainſi dire d'elles mêmes; mais l'Auteur avertit, que le mouvement contenu dans ces formules ne durera pas plus long-tems, que jusqu'à ce que deux de ces corps ſeront venus à s'entrechoquer, & qu'alors le mouvement continuera d'après des loix différentes, ſuivant que les corps ſeront plus ou moins mous ou élaſtiques.

Au reſte quoique chacune des trois équations différentielles ne ſoit pas intégrable par elle-même, M. Euler parvient cependant par une combinaiſon aſſés facile à une équation en termes finis, qui fait connoitre, que le commun centre de gravité des trois corps avancera d'un mouvement uniforme ſur la ligne droite, qui les enfile: & par une autre combinaiſon il trouve encore une équation, qu'on peut intégrer une fois, & qui renferme le principe fécond des forces vives, ou celui de la moindre action. Enſuite notre Auteur déploye ſa ſagacité ordinaire à réduire les variables à un plus petit nombre & à trouver des équations conciſes & élégantes, toutes cependant de nature à n'entrevoir aucun moyen de les intégrer. Comme la principale cauſe de ces difficultés paroit naitre de ce que le Problème eſt eucore trop général en admettant des corps, dont la maſſe & la viteſſe ſoyent dans un rapport quelconque, M. Euler s'arrête à un cas particulier, qui permet une ſolution parfaite, ſavoir quand les deux diſtances entre les trois corps gardent toûjours un rapport donné & conſtant entre elles, & il montre qu'on peut déterminer les maſſes des corps de manière, que ce rapport des diſtances ait lieu. La ſeule difficulté conſiſte à trouver la racine d'une équation du cinquiéme dégré. Il finit enſuite par la conſidération

d'un autre cas particulier, où la masse d'un des corps seroit infiniment petite, & il fait voir, que toutes les ressources connues du calcul sont encore insuffisantes pour résoudre l'équation, qui en resulte, & qu'elles resteroient meme insuffisantes, si l'on vouloit la simplifier encore d'avantage, en supposant la distance initiale de deux de ces corps infinie.

III.

Solutio Problematis Mechanici.

Auctore *L. Eulero*, pag. 142.

M. Euler considère ici deux cylindres parallèles entre eux, sur un plan horizontal, avec un fil, qui les enveloppe, en passant au-dessous de l'un, & au-dessus de l'autre: il suppose, que chacun de ces cylindres soit répréſenté par la section circulaire d'un plan, qui le coupe, & que ces deux sections avec le fil soyent situées dans un même plan vertical. On demande quelles lois suivra le mouvement de ces cylindres, si l'on donne un choc à l'un d'eux, ou à tous les deux à la fois? Après avoir trouvé les cinq équations nécessaires, qui renferment les six variables, que le Problème exige, l'Auteur parvient moyennant des substitutions ingénieuses, à démêler toutes ces variables de maniére, qu'il ne reste qu'une équation aux prémiéres différences assés simple, & où les variables sont séparées; si donc l'on accorde l'intégration de cette équation, toutes les autres variables se détermineront sans qu'il reste de difficulté, & le mouvement des cylindres sera connu.

IV.

IV.

Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible.

Par M. *Jacques Bernoulli.*

Troiſiéme Mémoire. Page 149.

Ce ſeroit une répétition inutile, que de faire un extrait de ce Mémoire, puisque ceux mêmes, qui ne voudroient pas ſe donner la peine de le lire en entier, trouveront dans l'introduction & dans les deux derniers paragraphes tout ce qui peut ſuffire à leur en faire connoitre l'objet & les réſultats.

V.

Raccourci des élémens dioptriques, qui ſervent de baſe à la théorie des objectifs achromatiques applicables aux Microſcopes.

Par M. *W. L. Krafft.* Page 162.

Le but, que l'auteur ſe propoſe dans ce Mémoire, eſt de déduire d'un ſeul principe général, de démontrer de la maniere la plus ſimple & de préſenter dans leur rapprochement les élémens, qui ſervent de *baſe* à la théorie des objectifs achromatiques, ſans les reſtreindre à l'hypothéſe d'un objet infiniment éloigné, afin qu'ils puiſſent dans la ſuite être employés à des recherches ſur les objectifs achromatiques & des appareils oculaires applicables aux Microſcopes. Le principe général, que l'auteur met pour baſe, exprime l'obliquité ſous laquelle l'axe d'une lentille eſt coupé par le rayon refracté, ainſi

que

que la distance du point de leur intersection à la derniere surface refringente, & pour que ces formules soient applicables à un point *quelconque* de l'objet, il répréſente la position du point lumineux comme par deux coordonnées, dont l'une en détermine la distance horisontale à la lentille, l'autre la hauteur verticale au dessus de l'axe de la lentille. Après avoir démontré ces formules générales, il en fait trois applications spéciales. D'abord il accommode ses formules aux rayons *infiniment proches de l'axe* de la lentille; & comme l'ouverture de la premiere surface refringente entre comme élément dans ces formules, il ne lui faut pour cet effet, que la supposer infiniment petite. Les ayant accommodées à ce cas là, il en tire la position & le demidiamètre de l'image formée derriere la lentille, en les appliquant aux rayons qui partent du *centre* de l'objet ainsi qu'à ceux qui partent de son *extrêmité*, & pour cet effet il n'a fallu que donner les valeurs respectives aux deux coordonnées, qui déterminent la position du point lumineux. Cela étant établi: l'Auteur détermine pour un nombre quelconque de lentilles placées sur un axe commun à certaines distances les unes des autres les dix suivans élémens dioptriques. 1.) La distance de chaque image aux deux lentilles, entre lesquelles elle se trouve placée. 2.) La route du rayon passant du centre de l'objet par l'extremité de l'ouverture infiniment petite de la premiere surface refringente. 3.) Les demidiamètres des images principales. 4.) Les distances des points d'intersection de l'axe avec le rayon passant de l'extremité de l'objet par le centre de la premiere lentille. 5.) Les obliquités de ces intersections. 6.) Les demidiamètres des ouvertures dues à la route de ce rayon. 7.) Le demidiamètre du champ apparent. 8.) La juste distance de l'oeil derriere la lentille, dûe au champ apparent. 9.) Le grossissement & 10.) le degré de classe de la vision. La seconde

appli-

application, que l'auteur fait de ſes formules générales, eſt de les accommoder aux rayons qui s'*écartent de l'axe* de la lentille. Il ſuppoſe pour cet effet à l'objectif une ouverture finie, telle cependant qu'on puiſſe negliger ſans erreur ſenſible les puiſſances plus hautes, que le cube du ſinus de l'angle de l'écartement des rayons. Ayant développé en conſequence ſes formules, il obtient pour la diſtance de l'image à la lentille une expreſſion en deux termes, dont le premier marque la diſtance de l'image *principale*, & le ſecond l'*aberration cauſée par la ſphéricité de la lentille*. Le même procédé ſert avec la même facilité à déterminer l'aberration cauſée par un nombre quelconque de lentilles ſpheriques. La troiſieme application de ces formules ſe fait aux rayons *differemment colorés* & à la recherche de l'aberration cauſée par leur differente refrangibilité. Pour les accommoder à la détermination de la route des rayons *extremes*, l'auteur fait varier dans ces formules la quantité, qui exprime la loi de la refraction des rayons *moyens* & recherche les variations, qui en reſultent dans les valeurs des formules generales, qui répréſentent la diſtance de l'image principale & l'obliquité du rayon refracté; d'ou il obtient l'aberration *longitudinale* & *angulaire* cauſée par la variabilité de la loi de refraction, ainſi que les équations, auxquelles il faudroit ſatisfaire pour aneantir cette eſpece d'aberration, c'eſt-à-dire, pour rendre les objectifs achromatiques.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De Ordine fibrarum muscularium cordis. Dissertatio VI. Pars posterior: Ventriculus sinister.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 185.

L'Auteur continue de considerer les variétés, qui se trouvent dans la structure des fibres externes du coeur, pour en constater la structure essentielle. Il parcourt dans cette seconde partie du sixieme mémoire les fibres du ventricule gauche, après avoir considéré celles du ventricule droit dans la premiere partie du même mémoire. Mais comme les fibres externes de celui-là sont beaucoup plus simples dans leur division, leur origine, leur progression & insertion, il ne s'est presque rien trouvé dans la premiere déscription de ces fibres, qui ne soit universel & constant. Cependant dans ces nouvelles recherches l'Auteur a trouvé plusieurs choses remarquables, qu'il n'avoit pas observées dans les premiers coeurs, & qu'il ajoute à présent à la déscription. Tels sont ces faisceaux musculaires, nommés par l'Auteur *terminaux*, qui par leur action, s'ils sont bien forts, produisent la double pointe du coeur, dont il est déja fait mention dans la premiere partie de ce mémoire. Encore que le coeur ne soit pas constamment pourvû de ces deux pointes distinctes, dont l'une appartient au ventricule droit, l'autre au gauche; les faisceaux eux-mêmes néanmoins sont bien constans, mais ils varient à l'égard de leur grandeur & de leur nombre. L'Auteur en a trouvé deux

ou

ou trois; il les a vûs bien forts, comme dans ce coeur, dont la figure eſt ajoutée à ce mémoire, & il les a vu auſſi très minces, comme s'ils n'étoient que trois fibres plus groſſes qu'à l'ordinaire. Mais jamais ils n'y manquent, & toujours ils prennent leur origine à la ſurface inférieure, vont de là par le milieu de la pointe du coeur & s'inſerent d'une maniere déterminée dans la ſurface ſupérieure. Leur eſſentiel eſt de donner un point ferme au ſecond ordre des fibres externes du ventricule gauche, qui par leurs extrémités s'y attachent.

L'Auteur décrit plus exactement, qu'il n'avoit fait dans la premiere déſcription, la ſtructure des fibres rayonnées, qui ſe trouvent autour de la pointe du ventricule gauche, principalement dans la ſurface ſupérieure. Il y a deux faiſceaux, qui prennent le même cours avec les autres fibres de leur ordre, mais qu'il en faut bien diſtinguer. L'un eſt plus poſtérieur & plus long, l'autre plus antérieur & plus court. Il ſeroit trop long, de vouloir donner ici une idée de la diſpoſition & de la ſtructure de ces fibres rayonnées, desquelles dépend la plus ſinguliere action du ventricule gauche, dont nous avons rendu compte dans l'annoncé du cinquieme mémoire ſur l'action des fibres externes du ventricule gauche. Il faut nous contenter de dire, que toute cette ſtructure dépend uniquement du cours des deux faiſceaux mentionnés, que l'Auteur appelle *faſciculi procurrentes*. Mais comme toutes les fibres rayonnées de la ſurface ſupérieure aboutiſſent à ces faiſceaux; celles de l'ordre ſecond, qui produiſent les fibres rayonnées de la ſurface inférieure, ſe terminent, comme il eſt dit, aux faiſceaux terminaux. Ainſi toute la figure rayonnée, que les fibres produiſent autour de la pointe du ventricule gauche, repoſe uniquement ſur la diſpoſition de ces faiſceaux, dont nous avons parlé. L'Auteur n'avoit point obſervé ces

faiſceaux dans les premiers coeurs, qu'il avoit examinés. Cependant ils ſont très conſtans, & il n'y a point de doute, qu'ils n'ayent pas exiſté auſſi dans ces mêmes coeurs. Mais il eſt infiniment plus difficile d'appercevoir une ſtrúcture ſinguliere, non réjailliſſante, dont on n'a eu auparavant aucune idée, que de la trouver, lorsqu'elle eſt connue.

Comme toutes ces circonſtances, nouvellement obſervées, produiſent divers changemens néceſſaires à faire dans la déſcription des fibres externes, principalement pour ce, qui regarde leur inſertion; l'Auteur détermine plus exactement cette inſertion pour toutes les fibres externes du ventricule gauche, & donne toute une nouvelle déſcription, plus exacte & plus complette, du troiſieme & quatrieme ordre de ces fibres.

II.

De ordine fibrarum muſcularium cordis Diſſertatio VII. De ſtratis fibrarum in vniuerſum.

Auctore Eodem. pag. 227.

Après avoir fini la déſcription des fibres externes des deux ventricules, & déterminé leurs actions, l'Auteur vient aux diverſes couches intérieures des fibres muſculaires, dont les ventricules ſont compoſés, & desquelles les fibres externes dans chaque ventricule n'étoient que la premiere. Il traite dans ce mémoire des diverſes couches de fibres en général.

Les Anatomiſtes, qui ſe ſont appliqués en particulier aux recherches ſur les fibres du coeur, comme *Locverus* & *Senac*, qui

qui pour ainſi dire en ſont les Auteurs claſſiques, n'ont pas manqué, il eſt vrai, d'obſerver ces couches diverſes, qui au reſte ne pouvoient pas facilement échapper. Mais ni le nombre des couches, ni leurs ſingularités, par leſquelles elles différent les unes des autres, ont été connues par eux; pour ne rien dire des diverſes bandes ou faiſceaux de fibres, dont elles ſont compoſées, de l'origine de ces bandes, de leur progrès & de leur inſertion, que ces habiles Anatomiſtes n'ont point obſervés dans ces couches intérieures non plus que dans les fibres externes. M. Wolff doute même, qu'aucun des Anatomiſtes ait vû entières ces couches, dont ils parlent, & que plutôt ils n'en ayent vû qu'une petite portion, dans laquelle ils ayent obſervé la direction des fibres, pour attribuer cette même direction à toute la couche. Ces Anatomiſtes parlent toujours de couches complettes, qui, comme les fibres externes, s'étendent ſur toute la ſurface du ventricule de la baſe jusqu'à la pointe, & du bord ſupérieur de la cloiſon jusqu'au bord inférieur. Ils préſentent même ces couches complettes dans leurs planches, ajoutées à leurs déſcriptions. Mais telles ne ſont point les couches de fibres, couvertes par les fibres externes. Elles commencent bien à la baſe, & s'étendent de là vers la pointe, mais elles n'y arrivent pas. Et plus les couches ſont intérieures, plus la partie, qui leur manque, eſt conſidérable, excepté la couche dernière ou interne, qui, comme l'externe, dans les deux ventricules eſt toute complette. Il manque à la ſeconde ou moyenne couche du ventricule droit dans la ſurface ſupérieure la troiſieme partie. La couche troiſieme du ventricule gauche ne s'étend que ſur les trois quatriemes parties du ventricule. La dernière partie quatrieme de celui-ci n'eſt couverte que de la couche externe & en partie de la ſeconde couche. Enfin la couche quatrieme du ventricule gauche ne couvre qu'à peu près la troſieme par-

tie du ventricule à la baſe; tout le reſte du ventricule ne participe que des trois extérieures couches. Ces circonſtances ne ſont pas de nature à pouvoir être échappés à l'obſervation; & ſans doute ſi les anatomiſtes euſſent jamais vû ces couches entières autant qu'elles exiſtent, ils ne les auroient pû ni decrire complettes, ni deſſiner telles, comme ils ont fait. Auſſi ces deſſeins, qu'ils en ont donnés n'ont-ils pas la moindre reſſemblance avec la nature. Mais comme il eſt facile de découvrir une petite partie d'une couche couverte, & qu'au contraire il faut beaucoup de patience & d'exactitude pour tirer toute une couche d'une autre couche, qu'elle couvre, ſans bleſſer ni la couche couverte, ni celle, qu'on en tire, & ſans arracher dans le prémier cas des portions de fibres à la couche couverte, ou de laiſſer dans le ſecond cas des portions de fibres de la couche tirée ſur la couche découverte, qui n'appartenant pas à celle-ci cachent ſa vraie ſtructure; il eſt vraiſemblable, que, ſuppoſant, que par toutes ſes diverſes parties les couches ſe reſſemblent, on n'ait découvert des diverſes couches que de petites parties, d'après lesquelles on s'eſt formé l'idée de toute la couche. On s'eſt bien trompé au reſte dans cette ſuppoſition, puisqu'on trouve non ſeulement des ſtructures toutes diverſes dans les diverſes parties d'une couche, mais que même auſſi la direction des fibres, laquelle ſeule d'ailleurs les anatomiſtes ont eu coutume d'obſerver, n'eſt point du tout la même par toute une couche.

M. Wolff réduit le nombre des couches du ventricule droit à trois, celui du gauche à ſix. Il définit chacune de ces couches, détermine la direction de leurs fibres & décrit leurs termes, c'eſt à dire jusqu'à quelle région chaque couche s'étend ſur le ventricule, comme nous avons dit. Il déduit de là une choſe très connue, & qui ſeule auroit dû avertir les

les anatomiſtes, que les diverſes couches ne peuvent pas toutes s'étendre ſur tout le ventricule. C'eſt la diverſe épaiſſeur des parois des ventricules, que l'on obſerve en les diſſéquant par une ſection longitudinale. Ces parois ſont toujours plus épaiſſes vers la baſe, plus minces vers la pointe. On obſerve cela dans les deux ventricules; mais il eſt plus remarquable dans le gauche, qui, chargé de pluſieurs couches, a en général les parois plus épaiſſes. Celles-ci ſe trouvant à peu près de deux lignes d'épaiſſeur vers la pointe ſurpaſſent cinq lignes près de la baſe, & on voit évidemment, comme de la baſe vers la pointe l'épaiſſeur diminue ſucceſſivement, à proportion, que les diverſes couches finiſſent.

L'Auteur parle enſuite de la différence, qui ſe trouve en général entre les fibres externes & les couches de fibres moyennes, ou intérieures. Il explique, pourquoi il étoit néceſſaire, que les fibres externes fuſſent plus compliquées & plus fermes, que les intérieures, & il traite enfin de ce tiſſu cellulaire délié, par lequel diverſes couches de fibres ſont attachées les unes aux autres. C'eſt un vrai tiſſu cellulaire pour ce, qui regarde ſa ſtructure, mais les fibrilles, dont il eſt compoſé, ſemblent participer de la nature muſculaire.

II.

Cinerum clavellatorum Roſſiae, itemque cinerum betulinorum examen chemicum.

Auctore *I. G. Georgi*, pag. 250.

La Potaſſe qui eſt un produit important des vaſtes forets de la Ruſſie, devient encore une branche très conſidérable du commerce tant à l'égard de ſon conſomption dans les ſavonneries & verreries, que par ſon exportation qui au ſeul port de St. Pétersbourg monte au delà de 35 mille poudes par an. M. Géorgi a donc cru cet objet bien digne de ſes recherches, & c'eſt ce qui l'a déterminé à examiner chymiquement les diverſes eſpéces de potaſſe qui ſont connues en Ruſſie, pour pouvoir les comparer avec celles qui ſe fabriquent dans les autres païs. Il indique d'abord les provinces qui en produiſent le plus copieuſement, telles que Penza, Nichnenovogorod, Kaſan, & toutes celles où des bois immenſes abondent en bouleaux, peupliers, tilleuls, & autres arbres ſemblables connus pour en fournir des riches recoltes. Notre Académicien donne enſuite une deſcription de la maniere de fabriquer la Potaſſe en Ruſſie, & range les différentes variétés qu'on en trouve ſous trois claſſes ; ſavoir *l'Ardaſſe* de la troiſieme bonté, qui eſt la moins pure, & encore mélée de cendres crues, *la Potaſſe* de la ſeconde bonté, & *la Perlaſſe* qui eſt la plus épurée: toutes ces variétés contiennent un ſel alcali pur, du tartre vitriolé & des terres calcaires & vitrifiables plus au moins mélées de ſable, ainſi que des parties martiales.

M. Géorgi en donne les proportions pour chaque variété, & paſſe enſuite à un examen chymique des cendres de bou-

bouleaux purs, & de celles de bouleaux mélés d'autres espéces de bois ; où il a bien trouvé de la magnéfie blanche en très petite quantité, mais où il a cherché en vain de la manganéfe que les chymiftes Suedois prétendent avoir trouvé dans ces cendres en grande quantité.

IV.

Mineralium quorundam rariorum recenfio, adiectis obferuationibus geologicis.

Auctore *I. I. Ferber*, pag. 260.

M. Ferber ayant fait un voyage par les états Autrichiens dans le deffein de s'inftruire de près de la nouvelle méthode d'amalgamer les minérais d'or & d'argent, pour en tirer avec le plus grand avantage le métal précieux qui s'y trouve, méthode inventée par le célébre M. de Born : il a eu occafion en paffant par la Saxe, la Bohème & la Hongrie, de voir & de ramaffer plufieurs foffiles très interéffantes & inftructives pour les minéralogues, pour ceux furtout qui tâchent de pénétrer plus en avant dans les myfteres du la nature pour former les minéraux. Le nombre des pieces dont il donne ici les défcriptions monte à 74; & il y en a de bien rares & de fort rémarquables, que les minéralogues liront avec un grand interet, telles font la magnéfie vitriolée nâtive, le quartz jaune en criftaux rhomboidaux, le plomb minéralifé par l'acide du fel, l'antimoine blanc, un ichtyolite dans du gyps, & autres. Notre académicien promet auffi dans fon mémoire de publier une nouvelle édition de la *Sciagraphia Bergmanniana*, dans laquelle il remplira les vuides de la gradation de la nature par de nouveaux genres & efpéces de minéraux decouverts dans ces derniers temps.

V.
Petrefacta ignota.

Auctore *Baſ. Zujew*, pag. 274.

Les deux pétrifications inconnues dont M. Zouyef donne ici la déſcription, ne reſſemblent ni l'une ni l'autre à aucun corps organiſé vivant que nous connoiſſons. On ne peut non plus les compter parmi les foſſiles figurés. Cependant M. Zouyef croit y remarquer quelques traits particuliers, qui lui font ſoupçonner que l'une de ces pieces eſt un poiſſon inconnu, & l'autre la corne d'un animal pareillement inconnu. L'une & l'autre ſont minéraliſées & ont été trouvées en Sibérie dans les mines de fer blanc.

VI.
Dianthi noui hybridi.

Auctore *I. T. Koelreuter*, pag. 277.

Presque toutes les expériences que M. Koelreuter expoſe dans ce mémoire ont ſupérieurement bien réuſſi & doivent encourager les fleuriſtes à continuer d'imiter les procédés mis en vogue par notre Auteur, pour la production de nouvelles varietés de plantes par le mélange ſexuel d'eſpéces différentes. Effectivement on doit à l'exemple de M. Koelreuter la production de ce grand nombre de variétés d'oeillets des jardins, qui ont paru en Europe depuis une vingtaine d'années, & qui continuent encore à paroitre. Peut-être devons nous auſſi beaucoup d'excellentes plantes potagéres à un ſemblable mélange d'eſpéces : & il ſeroit bien à ſouhaiter qu'un phyſicien auſſi exercé dans ces expériences puiſſe employer ſon

ſon temps à y aſſujettir toutes les plantes économiques qui peuvent être multipliées de marcottes ou de racines afin que les variétés hybrides qui poſſéderoient quelques qualités éminentes, puiſſent être multipliées pour le bien de la Société.

VII.

Sorex caecutiens.

Auctore *E. Laxmann*, pag. 285.

Le muſaraigne dont on donne ici les proportions & les méſures, péſe 65 grains: il eſt donc un tant ſoit peu plus gros que celui que M. le Conſeiller de Colleges Pallas a trouvé auprès du Lac Baikal, & qu'il nomme le muſaraigne à demi-aveugle. Voyez les voyages de M. Pallas Tom. I. pag. 454.

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Eclairciſſemens ſur le mémoire de M. de la Grange, inſéré dans le 5e Volume des Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les réſultats de pluſieurs obſervations, &c.

Par M. *Léonard Euler*, pag. 289.

On ſait que les Aſtronomes, après avoir fait un certain nombre d'obſervations qui donnent des réſultats différens, prennent la ſomme de ces réſultats & la diviſent par le nombre des obſervations. L'Auteur de ce mémoire s'étoit propoſé de déterminer la probabilité que cette ſomme devienne égale ou à zero ou à un autre nombre quelconque, poſitif ou négatif. Il ſuppoſe, pour cet effet, que pour connoître la hauteur d'un aſtre, ou ſa déclinaiſon, ou enfin quoi que ce ſoit, on ait fait a obſervations qui donnent au juſte ce qu'on cherche, b obſervations qui le donnent d'une minute trop grand, & c obſervations qui le donnent trop petit d'une minute, de ſorte que le nombre de toutes les obſervations faites à ce ſujet ſoit $N = a + b + c$; & il s'agit de voir quelle ſera la probabilité que la ſomme des reſultats devienne ou 0, ou ± 1, ou ± 2, ou ± 3, &c.

Cette queſtion ſe reduit à la ſuivante: De N billets, dont a ſont marqués par 0, b par $+1$ & c par -1, on tire au hazard ſucceſſivement n billets, en remettant chaque fois

fois le billet tiré: & l'on demande la probabilité que la ſomme de tous les nombres tirés ſoit ou 0, ou ± 1, ou ± 2, &c., Problème dont l'auteur conſidère d'abord quelques cas particuliers, où $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ & $n = 4$, dont la réſolution eſt ſuivie du Problème général réſolu par les principes connûs de la Théorie des combinaiſons & du calcul des probabilités, par le développement de la puiſſance $N^n = (a+b+c)^n$, où la forme générale de chaque terme eſt $M\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$, la ſomme des expoſans étant $\alpha + \beta + \gamma = n$ & le coéfficient

$$M = \frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{1.2.3.\ldots\alpha \times 1.2.3.\ldots\beta \times 1.2.3.\ldots\gamma}.$$

Ces opérations ſont longues & desagréables, ſi on les fait de la maniere ordinaire; M. Euler fait voir comment on peut trouver les termes affectés de la même puiſſance $\alpha + \beta + \gamma = n$, ſans recourir au développement actuel, & il finit ſon mémoire par la réſolution du Problème général, où, après avoir fait $N = a + b + c + d +$ &c. obſervations, dont les

a ont la même erreur α,
b - - - - β,
c - - - - γ,
&c.

on veut ſavoir la probabilité que le milieu devienne un nombre quelconque $\frac{\lambda}{n}$. Pour cet effet il faut conſidérer la puiſſance $(a\,x^\alpha + b\,x^\beta + c\,x^\gamma +$ &c.$)^n$ & prendre la ſomme de tous les termes affectés de la même puiſſance x^λ, qui diviſée par N^n donnera la probabilité que le milieu ſera $\frac{\lambda}{n}$.

II.

Determinatio latitudinis & longitudinis fortalitii Mosdok deducta ex obſeruationibus anno 1785 a Theodoro Tſchernoi inſtitutis.

Auctore *Steph. Rumovsky*, pag. 298.

M. Tſchernoi, après avoir achevé de déterminer la ſituation géographique des principaux endroits de la Tauride, ſe rendit à Mosdoc vers la fin de Septembre 1785. Les obſervations qu'il y a faites pour vérifier ſurtout la longitude, ſur laquelle l'Académie avoit encore quelque doute, ont toutes l'empreinte d'une exacte vérité. Après avoir recherché la vérification du quart de cercle, notre obſervateur a pris en diverſes ſoirées les hauteurs méridiennes de cinq étoiles fixes, qui jointes à celles du ſoleil donnent très exactement la latitude de la fortereſſe de Mosdoc de 43°. 43′. 23″. Il s'eſt appliqué enſuite à obſerver quelques émerſions des ſatellites de Jupiter, dont deux ſe trouvant être correſpondantes à celles que M. le Comte de Caſſini a eu la complaiſance de communiquer, M. le Conſeiller de Cour Roumovski en conclut avec une préciſion ſuffiſante, la difference entre les méridiens de Mosdoc & de Paris de 2^h. 46′ de temps ou bien de 41°. 30′ en arc de l'équateur; & par conſequent la longitude de Mosdoc depuis le premier méridien de 61°. 30′.

L'aiguille magnétique a été trouvée décliner le 10 Octobre n. ſt. de 6°. 40′ vers l'Oueſt.

III.

III.

Remarque sur une nouvelle méthode de trouver l'Anomalie excentrique par l'anomalie moyenne.

Par M. *Nicolas Fuss*, pag. 302.

Cette remarque a été occasionnée par une nouvelle formule que M. Klügel avoit donnée dans les Ephémérides de Berlin pour déterminer l'Anomalie excentrique, l'Anomalie moyenne étant donnée. M. Fuss renouvelle, à cette occasion, la mémoire d'une expression très-simple & facile à calculer, que feu M. Euler avoit déja donnée autrefois dans les anciens Commentaires de l'Académie, & dont ce petit mémoire fait voir les avantages par quelques applications convenables.

IV.

Extrait des Observations météorologiques faites à St. Pétersbourg.

Suivant le nouveau Stile.

Par M. *Jean-Albert Euler*, pag. 307.

I. Pendant l'Eté de 1785, ou depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 1785, ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La Neva debacla le 2 de Mai, & fut reprise après 223 jours le 8 Décembre.

Il géla pour la derniere fois le 11 Mai, & il recommença à géler le 19 Septembre: l'intervalle entre ces deux époques est donc de 131 & par conséquent de 2 jours moindre qu'en 1784.

Il neigea pour la derniere fois le 10 Mai, & il recommença à neiger le 17 Septembre, ce qui donne un interval le de 130 jours.

La plus grande chaleur a été de 108 degrés le 23 Juillet après midi: par conſéquent de 5 degrés plus petite qu'en 1784.

La moyenne chaleur deduite de celles qui ont été obſervées à 2 heures après midi, a été de $129\frac{4}{5}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $124\frac{9}{10}$: par conſéquent conſidérablement moindre qu'en 1784.

La moyenne chaleur tirée des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir a été pour les mêmes intervalles de temps: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, de $138\frac{3}{10}$ & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $133\frac{9}{10}$: encore plus petite qu'en 1784.

La chaleur à 2 heures après midi n'a été qu'en 2 jours plus grande que 110: elle a été en

32 jours entre 120 & 110
57 jours entre 130 & 120
58 jours entre 140 & 130 &
35 jours entre 150 & 140 degré.

La chaleur obſervée aux heures du matin & du ſoir s'eſt trouvée en 19 jours moindre que 150: ou bien il a gélé en 19 jours: elle a été en

72 jours entre 140 & 150
57 jours entre 130 & 140 &
36 jours entre 120 & 130 degrés.

L'Eté

L'Eté de 1785 a par conſéquent été à tous égards moins favoriſé que ceux des années précédentes.

Le Baromètre a été au plus haut le 13 Septembre à 12 heures midi, de 28. 36 pouces. Therm. 129. Calme & ciel ſerein. Au plus bas le 12 Juillet à 3 heures matin, de 27. 21 pouces. Thermom. 132. Vent du SOu. Ciel couvert & beaucoup de pluie. La variation totale 1. 15 & le milieu 27. 785 pouces.

La hauteur moyenne 27, 842: par conſéquent de 0, 201 ou de $\frac{201}{1000}$ pouces plus petite qu'en 1784, ce qui fait une différence de presque 2 lignes & demie.

Enfin la hauteur barometrique a ſurpaſſé 27, 90 pouces pendant 78 jours 15 heures, 28 pouces pendant 50 jours 15 heures & 28. 10 pouces pendant 23 jours 18 heures.

Les Vents forts ont ſoufflé

3 jours du Nord: le 4. 30 Juin & le 2 Septembre.
6 jours du NE: le 28. 29 Mai, le 15 Juin & le 5. 7. 11 Juillet.
6 jours de l'Eſt: le 3. 6. 9 Juin, le 6. 27 Juillet & le 20 Août.
3 jours du SE: le 23 Juillet, le 11 Août & le 14 Octobre.
8 jours du Sud: le 18. 19 Mai, 26. 28 Août, le 6 Sept. & le 26. 28. 29 Octobre.
9 jours du SOu: le 8. 20 Mai, le 26. 27 Septembre & le 24. 25. 27. 29. 31 Octobre.
9 jours de l'Oueſt: le 9. 10 Mai, le 2. 3 Août, le 7. 8. 24. 28 Septembre & le 23 Octobre.

4 jours du NOu. le 11 Mai, le 14 Juin, le 28 Juillet & le 23 Septembre.

parmi lesquels les vents du 14. 15 Juin, 28 Juillet & du 26. 27 Octobre ont été les plus violens.

Cet été a donc été moins venteux que le précédent, mais le vent dominant a encore été celui de l'Oueſt.

Enfin il y eut:

49 jours de ciel entiérement ſerein; 57 jours de ciel entiérement couvert, & 12 jours de brouillard.

26 jours de pluie copieuſe, 73 jours de pluie médiocre: en tout 99 jours de pluie: 11 jours de neige & 4 jours de grêle.

4 orages complets, 3 jours où il n'a fait que tonner de loin: 5 fois éclairs de nuit, & 8 aurores boréales, dont 4 furent fort ſplendides.

II. Pendant l'hyver de 1785 à 1786, en y comprenant les quatre premiers Mois de 1786; ainſi depuis le 1er Novembre 1785 jusqu'au 1er Mai 1786, ce qui fait un nombre de 181 jours.

La Neva ayant été priſe le 8 Décembre, elle demeura dans ſon état de congélation pendant 134 jours, jusqu'au 22 Avril, où elle débacla à 10 h. avant midi, par une temperature de 142 degrés de Delisle. Barom. 28. 33. Calme, ciel ſerein.

L'intervalle entre la 1re gélée du 19 Septembre & la derniere du 11 Mai eſt de 234 jours; c'eſt à dire de 11 jours plus

plus grand que l'hyver précedent. La premiere neige étant tombée le 17 Septembre, il neigea pour la derniere fois le 2 Mai; l'intervalle entre ces deux époques eſt de 227 jours.

Le plus grand froid après la graduation de Délisle a été de 202 degrés le 2 Janvier à 8 heures du matin. Barom. 28. 52. Ciel ſerein, vent du Nord peu ſenſible.

Le froid moyen deduit des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir eſt de $163\frac{1}{3}$, & depuis le 1 Décembre jusqu'au 1er Avil de $168\frac{1}{2}$ degrés: ce qui ne diffère près que point du froid moyen de l'hyver précedent.

Le froid moyen entre ceux qui ont été obſervés à 2 heures après midi, eſt de $154\frac{1}{4}$ & pour l'intervalle du 1 Décembre au 1er Avril de 160 degrés.

Le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir a été

1 jour plus grand que 200 degrés, au 2 Janvier
8 jours entre 190 & 200
14 jours entre 180 & 190
31 jours entre 170 & 180
30 jours entre 160 & 170
82 jours entre 150 & 160 &
15 jours moindre que 150 degrés, ou de dégel continuel.

Le froid des après-midi, obſervé à 2 heures, a été

6 jours moindre que 130 degrés, vers la fin d'Avril
19 jours entre 140 & 130, en Mars & en Avril
53 jours entre 150 & 140: ce qui font 78 jours, où il n'a dégelé qu'aux heures de l'après midi. Enſuite

46 jours entre 160 & 150 degrés
36 jours entre 170 & 160 ——
15 jours entre 180 & 170 ——
3 jours entre 190 & 180 &
3 jours entre 200 & 190 degrés: par conſéquent 103 jours de gelée continuelle.

Le Baromètre a été: au plus haut 29. 04 le 17 Décembre à 1 heure après midi, & au plus bas 27. 01 le 29 Janvier à 7 heures du matin. Therm. 150. Vent très fort du NOu. Ciel couvert, neige & pluie. La variation totale 2. 03 & le milieu 28. 025. Enſuite la hauteur moyenne 28. 155 ou 28. $\frac{115}{1000}$ pouces de Paris. Enfin la hauteur du Baromètre a été 129 jours plus grande que 27, 90, 114 jours 6 heures plus grande que 28. 00, & 101 jours 18 heures plus grande que 28. 10 pouces.

Les Vents forts ont ſoufflé

5 jours du Nord le 29 Décembre, & le 3. 16. 19. 21 Février.
1 jours du NE. le 14 Novembre.
7 jours de l'Eſt, le 7 Novembre, le 4. 10 Décembre, le 3 Janvier & le 1. 26. 27 Mars.
5 jours du SE, le 12. 13. 28 Décembre, le 15 Janv. & le 30 Mars.
6 jours du Sud, le 28 Novembre, le 21 Décembre, le 26 Janv. & le 14. 15. 18 Février.
15 jours du SOu. le 1. 10. 15. 24 Novembre, le 1. 5 Décembre, le 13 Janv. le 5. 6 Févr. le 15 Mars & le 10. 11. 14. 15. 30 Avril.

8 jours

8 jours de l'Oueſt, le 11. 17. 26 Novembre, le 20 Décembre, le 14. 21. 27 Janvier, & le 16 Mars.

9 jours du NOu. le 12. 16. 25 Novembre, le 18. 19 Décembre, le 28. 29 Janvier & le 23. 28 Fevrier.

entre lesquels les vents du 10 & 24 Novembre, ceux du 3. 26. 29 Janvier & du 14. 15 & 18 Février, ont été les plus violens.

Enfin il y a eu :

49 jours de ciel entiérement ſerein, 85 jours de ciel entiérement couvert & 18 jours de brouillard : enſuite

8 jours de neige copieuſe & 65 jours de neige médiocre, en tout 73 jours de neige : 18 jours de pluie : 1 jour de grêle : enfin 26 aurores boréales, dont 14 étoient très ſplendides.

Errata.

Pag. 269.	lin. 1.	*lege* & *aurantii* coloris
	lin. 4.	—— paruulas cochleas
	lin. 8.	—— quem primaeuum vocitare
	lin. 15.	—— fodinis plumbiferis
	lin. 18.	—— ſpatoſas
	lin. 19.	—— Banatus temiſenſis
	lin. 20.	—— fodina Laurentii
Pag. 270.	lin. 12 et 14	*lege* Cobalti *loco* Cabalti
	lin. 22	*lege* Cultro ſcinditur
Pag. 271.	lin. 5.	*lege* Vngariae ſuperioris, nec non
	lin. 25	*lege* Inſident galenae plumbi
Pag. 272.	lin. 8 et 9	*lege* Lazuli imitatur
	lin. 11.	*lege* qualis ad
	lin. 21.	—— inquirere potui
	lin. 26.	—— ſchoerlum viridem
	lin. 28.	—— prope *Reichenberg*
Pag. 301.	lin. 5 et 6	*lege* $2^{h}.\ 46'$ ſiue $41^{\circ}.\ 30'$ a meridiano Pariſino et $61^{\circ}.\ 30'$ a meridiano primo.

MATHE-

MATHEMATICA.

MATHEMATICA

METHODVS FACILIS INVENIENDI INTEGRALE HVIVS FORMVLAE

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos.\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos.\theta + 1},$$

CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR VEL $x = 1$ VEL $x = \infty$.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

§. 1.

Denotet S integrale huius formulae generaliter sumtum, ita vt quaeri debeat valor ipsius S, casu quo statuitur $x=1$; vbi primum obseruo, formam propositam multo concinniorem reddi, si fractionis numerator et denominator per x^n diuidantur; tum enim habebimus

$$S = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - 2\cos.\zeta + x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}.$$

Hic statim patet, denominatorem $x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}$ semper in n factores resolui posse, qui singuli sint formae $x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1}$, vbi angulum ω ita capi oportet, vt, dum iste euanescit, simul etiam ipse denominator ad nihilum redigatur.

§. 2. Posito autem isto factore $x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1} = 0$, inde fit $x = \cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega$, vnde in genere colligitur

$$x^\lambda = \cos.\lambda\omega + \sqrt{-1}\sin.\lambda\omega \text{ et}$$

$$x^{-\lambda} = \cos.\lambda\omega - \sqrt{-1}\sin.\lambda\omega.$$

Hinc ergo denominator istum accipiet valorem: $2\cos.n\omega - 2\cos.\theta$, qui igitur euanescet, si pro $n\omega$ sumatur aliquis ex his valoribus:

$$\theta,\ \theta+2\pi,\ \theta+4\pi,\ \theta+6\pi,\ \theta+8\pi,\ \text{etc.}$$

quare cum numerus horum valorum debeat esse $= n$, omnes valores anguli ω erunt sequentes:

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta+2\pi}{n},\ \frac{\theta+4\pi}{n},\ \frac{\theta+6\pi}{n},\ \ldots\ldots\ \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}.$$

Praeterea vero cum sit $\cos.n\omega = \cos.\theta$, erit etiam $\sin.n\omega = \sin.\theta$.

§. 3. Cum igitur denominator habeat n factores huius formae: $x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1}$, nostra fractio, quicunque fuerit eius numerator, in n fractiones simplices resolui poterit, quarum denominatores erunt illi n factores denominatoris. Scribamus igitur breuitatis gratia Π loco numeratoris $x^p - 2\cos.\zeta + x^{-p}$, atque haec fractio: $\frac{\Pi}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$ resoluetur in n fractiones simplices, quarum singulae hanc habebunt formam: $\frac{P}{x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1}}$, quocirca statuamus:

$$\frac{\Pi}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}} = \frac{P}{x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1}} + R;$$

vbi littera R omnes reliquas complectatur fractiones, vnde statim habebimus

$$\frac{\Pi(x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1})}{x^n - 2\cos.\vartheta + x^{-n}} = P + R(x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1}).$$

Quodsi

Quodſi iam faciamus $x^1 - 2\,\text{cof.}\,\omega + x^{-1} = 0$, hinc colligemus numeratorem P: erit enim

$$P = \frac{\Pi\,(x^1 - 2\,\text{cof.}\,\omega + x^{-1})}{x^n - 2\,\text{cof.}\,\theta + x^{-n}},$$

ſiquidem in hac aequatione ponatur $x = \text{cof.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$.

§. 4. At vero iam vidimus, ſi ipſi x hunc valorem tribuamus, illius fractionis tam numeratorem quam denominatorem euaneſcere, quamobrem ſecundum regulam notiſſimam loco numeratoris et denominatoris ſua ſcribamus differentialia, ac prodibit $P = \frac{\Pi\,(x^1 - x^{-1})}{n\,x^n - n\,x^{-n}}$. Nunc igitur ſi loco x valor aſſignatus ſcribatur, primo pro Π nanciſcemur hunc valorem:

$$\Pi = 2\,\text{cof.}\,p\,\omega - 2\,\text{cof.}\,\zeta;$$

ex fractione autem oritur iſte valor: $\frac{\text{ſin.}\,\omega}{n\,\text{ſin.}\,n\,\omega}$, quae ergo expreſſio cum ſit realis, numerator quaeſitus erit

$$P = \frac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{cof.}\,p\,\omega - \text{cof.}\,\zeta)}{n\,\text{ſin.}\,n\,\omega}.$$

Iam autem vidimus eſſe $\text{ſin.}\,n\,\omega = \text{ſin.}\,\theta$, vnde iſte numerator erit $P = \frac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{cof.}\,p\,\omega - \text{cof.}\,\zeta)}{n\,\text{ſin.}\,\theta}$.

§. 5. Quaelibet igitur fractio partialis ex reſolutione fractionis propoſitae oriunda erit huiusmodi:

$$\frac{2\,(\text{cof.}\,p\,\omega - \text{cof.}\,\zeta)}{n\,\text{ſin.}\,\theta} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\omega}{x^1 - 2\,\text{cof.}\,\omega + x^{-1}},$$

in qua forma ſi angulo ω ſucceſſiue tribuantur omnes valores ſupra aſſignati, qui erant

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta + 2\pi}{n},\ \frac{\theta + 4\pi}{n},\ \ldots\ \frac{\theta + 2\,(n-1)\,\pi}{n},$$

orientur omnes fractiones partiales, quae in vnam ſummam

collectae ipsam formam propositam $\frac{x^p - 2\cos.\zeta + x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$ producere debebunt, vnde etiam singulae in $\frac{\partial x}{x}$ ductae et integratae, tum vero in vnam summam collectae, exhibebunt integrale quaesitum S.

§. 6. Consideremus igitur fractionem: $\frac{\sin.\omega}{x^2 - 2\cos.\omega + x^{-2}}$, quae ducta in $\frac{\partial x}{x}$ praebet $\frac{\partial x \sin.\omega}{x^2 - 2\cos.\omega + 1}$, cuius integrale, ita sumtum vt euanescat posito $x = 0$, constat esse $=$ A tang. $\frac{x\sin.\omega}{1 - x\cos.\omega}$. Hinc igitur ex hac fractione partiali oritur ista pars integralis: $\frac{2(\cos.p\omega - \cos.\zeta)}{n\sin.\theta}$. A tang. $\frac{x\sin.\omega}{1 - x\cos.\omega}$, vnde ergo facile deducuntur omnes n partes integralis quaesiti, si loco ω ordine omnes eius valores assignati substituantur atque in vnam summam colligantur.

§. 7. Quoniam autem hoc loco eum tantum integralis valorem postulamus, qui oritur posito $x = 1$, hoc casu fiet

$$\text{A tang.}\frac{x\sin.\omega}{1 - x\cos.\omega} = \text{A tang.}\frac{\sin.\omega}{1 - \cos.\omega}.$$

At vero ista formula $\frac{\sin.\omega}{1 - \cos.\omega}$ exprimit cotangentem anguli $\frac{1}{2}\omega$, ideoque tangentem anguli $\frac{\pi - \omega}{2}$, ita vt hoc casu pars integralis futura sit $\frac{\cos.p\omega - \cos.\zeta}{n\sin.\theta}(\pi - \omega)$. Hic autem in transitu notasse iuuabit, si desideretur integrale pro casu $x = \infty$, tum proditurum esse A tang. $-\frac{\sin.\omega}{\cos.\omega}$; quia igitur est $-\frac{\sin.\omega}{\cos.\omega}$ tangens anguli $\pi - \omega$, cum ante habuissemus $\frac{\pi - \omega}{2}$, hinc patet, casu $x = \infty$ etiam totum integrale duplo maius fore quam casu $x = 1$.

§. 8.

§. 8. Tribuamus igitur angulo ω ſucceſſiue omnes eius valores, eosque ordine hic ſiſtamus, eritque

$$S = \frac{\text{cof.}\frac{p\theta}{n} - \text{cof.}\,\zeta}{n\,\text{ſin.}\,\theta}\cdot\left(\pi - \frac{\theta}{n}\right)$$
$$+ \frac{\text{cof.}\frac{p}{n}(\theta + 2\pi) - \text{cof.}\,\zeta}{n\,\text{ſin.}\,\theta}\cdot\frac{(n-2)\pi-\theta}{n}$$
$$+ \frac{\text{cof.}\frac{p}{n}(\theta + 4\pi) - \text{cof.}\,\zeta}{n\,\text{ſin.}\,\theta}\cdot\frac{(n-4)\pi-\theta}{n}$$
$$+ \frac{\text{cof.}\frac{p}{n}(\theta + 6\pi) - \text{cof.}\,\zeta}{n\,\text{ſin.}\,\theta}\cdot\frac{(n-6)\pi-\theta}{n}$$
$$\text{etc.}$$

quarum formularum numerus debet eſſe $= n$. Haec autem expreſſio ſtatim in duas partes diſtinguatur hoc modo indicandas: $S = \frac{Q}{n\,\text{ſin.}\,\theta} - \frac{R\,\text{cof.}\,\zeta}{n\,\text{ſin.}\,\theta}$, ita vt ſit

$$Q = \frac{n\pi-\theta}{n}\,\text{cof.}\frac{p\theta}{n} + \frac{(n-2)\pi-\theta}{n}\,\text{cof.}\frac{p}{n}(\theta + 2\pi)$$
$$+ \frac{(n-4)\pi-\theta}{n}\,\text{cof.}\frac{p}{n}(\theta + 4\pi)\ \text{etc.}$$

$$R = \frac{n\pi-\theta}{n} + \frac{(n-2)\pi-\theta}{n} + \frac{(n-4)\pi-\theta}{n} + \frac{(n-6)\pi-\theta}{n} + \text{etc.}$$

ita vt iam nobis incumbatur in valores litterarum Q et R inquirere.

§. 9. Primo autem ſtatim patet, valorem ipſius R eſſe progreſſionem arithmeticam decreſcentem differentia $\frac{2\pi}{n}$, vnde ſumma n terminorum erit $= \pi - \theta$, ita vt ſit $R = \pi - \theta$. At vero inuentio progreſſionis Q maiorem requirit apparatum, quem in finem ſequentes inueſtigationes generaliores praemittamus.

§. 10. Conſideretur primo progreſſio iſta coſinuum, quorum anguli in progreſſione arithmetica progrediantur et quorum numerus ſit n:

$$t = \text{cof.}(\alpha+2\beta)+\text{cof.}(\alpha+4\beta)+\text{cof.}(\alpha+6\beta)+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\text{cof.}(\alpha+2n\beta).$$

Iam multiplicemus vtrinque per 2 ſin. β, et cum ſit

$$2\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\gamma = \text{ſin.}(\beta+\gamma)-\text{ſin.}(\gamma-\beta),$$

proueniet ſequens forma:

$$2t\,\text{ſin.}\,\beta = -\text{ſin.}(\alpha+\beta)+\text{ſin.}(\alpha+3\beta)+\text{ſin.}(\alpha+5\beta)+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\text{ſin.}(\alpha+(2n+1)\beta) \\ -\text{ſin.}(\alpha+3\beta)-\text{ſin.}(\alpha+5\beta)-\ldots\ldots$$

vbi omnes termini intermedii manifeſto ſe deſtruunt, ita vt ſoli extremi remaneant, hincque ergo fiet

$$t = \frac{\text{ſin.}[\alpha+(2n+1)\beta]-\text{ſin.}(\alpha+\beta)}{2\,\text{ſin.}\,\beta}.$$

§. 11. Deinde vero iidem coſinus combinentur cum numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, ... n, ac ſtatuatur

$$u = 1\,\text{cof.}(\alpha+2\beta)+2\,\text{cof.}(\alpha+4\beta)+3\,\text{cof.}(\alpha+6\beta)+\ldots \\ \ldots\ldots+n\,\text{cof.}(\alpha+2n\beta)$$

qua expreſſione ducta in 2 ſin. β, adhibita reſolutione qua modo ſumus vſi, conſequemur

$$2u\,\text{ſin.}\,\beta = -\text{ſin.}(\alpha+\beta)+\text{ſin.}(\alpha+3\beta)+2\,\text{ſin.}(\alpha+5\beta)+\ldots \\ \ldots\ldots+\text{ſin.}(\alpha+(2n+1)\beta) \\ -2\,\text{ſin.}(\alpha+3\beta)-3\,\text{ſin.}(\alpha+5\beta)-\ldots$$

quae forma reducitur ad iſtam:

$$n\,\text{ſin.}(\alpha+(2n+1)\beta)-2u\,\text{ſin.}\,\beta = \text{ſin.}(\alpha+\beta)+\text{ſin.}(\alpha+3\beta)+\ldots \\ \ldots\ldots+\text{ſin.}(\alpha+(2n-1)\beta)$$

quae vocetur $= v$.

§. 12.

§. 12. Nunc iſta ſeries denuo ducatur in $2 \sin. \beta$, et cum in genere ſit

$$2 \sin. \beta \sin. \gamma = \cos. (\gamma - \beta) - \cos. (\gamma + \beta),$$

nanciſcemur

$$2v \sin. \beta = \cos. \alpha - \cos. (\alpha + 2\beta) - \cos. (\alpha + 4\beta) - \ldots - \cos. (\alpha + 2n\beta) + \cos. (\alpha + 2\beta) + \cos. (\alpha + 4\beta) + \ldots$$

vnde ob terminos medios omnes ſe deſtruentes colligitur

$$v = \frac{\cos. \alpha - \cos. (\alpha + 2n\beta)}{2 \sin. \beta};$$ quare cum ſit

$$u = \frac{n \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - v}{2 \sin. \beta},$$ hinc obtinemus

$$u = \frac{n \sin. (\alpha + (2n+1)\beta)}{2 \sin. \beta} - \frac{[\cos. \alpha - \cos. (\alpha + 2n\beta)]}{4 \sin. \beta^2}.$$

§. 13. Combinemus nunc ambas ſummationes modo traditas in genere, ac ſtatuamus

$$V = (a+b) \cos. (\alpha + 2\beta) + (a+2b) \cos. (\alpha + 4\beta) + (a+3b) \cos. (\alpha + 6\beta) + \ldots + (a+nb) \cos. (\alpha + 2n\beta),$$

atque euidens eſt fore $V = at + bu$, vnde loco t et u valoribus ſubſtitutis erit

$$V = \frac{a \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - a \sin. (\alpha + \beta)}{2 \sin. \beta} + \frac{bn \sin. (\alpha + (2n+1)\beta)}{2 \sin. \beta} - \frac{b \cos. \alpha + b \cos. (\alpha + 2n\beta)}{4 \sin. \beta^2}.$$

§. 14. Iam ſatis perſpicuum eſt progreſſionem, quam ſupra littera Q exhibuimus, in iſta forma generali pro V inuenta contineri, quandoquidem vtrinque idem terminorum numerus n occurrit, atque coëfficientes cosinuum ſeriei Q etiam progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Quamobrem pro coëfficientibus primo faciamus

$$a + b = \frac{n\pi - \theta}{n} \text{ et } a + 2b = \frac{(n-2)\pi - \theta}{n},$$

vnde deducimus

$$b = -\frac{2\pi}{n} \text{ et } a = \frac{(n+2)\pi-\theta}{n}.$$

Nunc etiam angulos inter ſe coaequemus faciamusque

$$\alpha + 2\beta = \frac{p\theta}{n} \text{ et } \alpha + 4\beta = \frac{p}{n}(\theta + 2\pi),$$

vnde colligimus $\beta = \frac{\pi p}{n}$, hincque porro

$$\alpha = \frac{p}{n}(\theta - 2\pi) = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta),$$

hocque modo fiet $V = Q$. At anguli in expreſſione ipſius V occurrentes erunt: primo

$$\alpha + (2n+1)\beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta)$$

vbi cum p ſit numerus integer, poſtrema pars $2\pi p$, totam circumferentiam exprimens, omiſſa eſt, ex quo habebimus

$$\text{ſin.}(\alpha + (2n+1)\beta = -\text{ſin.}\frac{p}{n}(\pi - \theta).$$

Deinde occurrit angulus

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta), \text{ cuius ſinus eſt}$$

$$\text{ſin.}(\alpha + \beta) = -\text{ſin.}\frac{p}{n}(\pi - \theta).$$

Denique erit

$$\alpha + 2n\beta = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta) \text{ et}$$

$$\text{coſ.}(\alpha + 2n\beta) = \text{coſ.}\frac{p}{n}(2\pi - \theta).$$

His igitur valoribus ſubſtitutis prodibit

$$Q = V = -\frac{\frac{(n+2)\pi-\theta}{n}\text{ſin.}\frac{p}{n}(\pi-\theta) + \frac{(n+2)\pi-\theta}{n}\text{ſin.}\frac{p}{n}(\pi-\theta)}{2\,\text{ſin.}\frac{\pi p}{n}}$$

$$+\frac{2\pi\,\text{ſin.}\frac{p}{n}(\pi-\theta)}{2\,\text{ſin.}\frac{\pi p}{n}}$$

$$+\frac{\frac{2\pi}{n}\text{coſ.}\frac{p}{n}(2\pi-\theta) - \frac{2\pi}{n}\text{coſ.}\frac{p}{n}(2\pi-\theta)}{4\,\text{ſin.}\frac{\pi p^2}{n}}$$

quae

quae expreſſio manifeſto reducitur ad hanc:

$$Q = V = \frac{\pi \text{ ſin. } \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{\text{ſin. } \frac{\pi p}{n}}.$$

§. 15. Inuentis igitur valoribus litterarum Q et R, valor integralis quem quaerimus pro caſu $x = 1$ erit

$$S = \frac{\pi \text{ ſin. } \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \text{ ſin. } \theta \text{ ſin. } \frac{\pi p}{n}} - \frac{(\pi - \theta)\cos. \zeta}{n \text{ ſin. } \theta}.$$

Sin autem integrale quaeratur a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$, eius valor duplo maior euadet.

§. 16. His iam in genere expeditis, conſideremus caſum iam ſaepius tractatum, quo eſt $\zeta = 90°$ et $\theta = 90°$, haecque formula integranda proponitur: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}}$, atque pro eius valore caſu $x = 1$ habebimus $S = \frac{\pi \text{ ſin. } \frac{p\pi}{2n}}{n \text{ ſin. } \frac{p\pi}{n}}$, quae ob ſin. $\frac{p\pi}{n} = 2 \text{ ſin. } \frac{p\pi}{2n} \cos. \frac{p\pi}{2n}$, abit in formulam illam notiſſimam $\frac{\pi}{2n \cos. \frac{p\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n} \text{ ſec. } \frac{p\pi}{2n}$. Sin autem tantum ſumamus $\zeta = 90$, vt formula integranda ſit $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\cos. \theta + x^{-n}}$, eius valor ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſus erit $\frac{\pi \text{ ſin. } \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \text{ ſin. } \theta \text{ ſin. } \frac{p\pi}{n}}$, quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$\frac{\pi}{n \text{ ſin. } \theta}\left(\cos. \frac{p\theta}{n} - \text{ſin. } \frac{p\theta}{n} \cot. \frac{p\pi}{n}\right).$$

OBSERVATIONES
in integrationem traditam.

I. Primum hic obſeruo terminum medium in numeratore exhibitum nullo modo integrationem turbare, quoniam, ſi ſolus adeſſet, integratio nulla laboraret difficultate; tum enim formula $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{1}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$ reducitur ad hanc formam: $\int \frac{x^{n-1}\partial x}{x^{2n} - 2x^n \cos.\theta + 1}$, quae poſito $x^n = y$ abit in hanc: $\frac{1}{n}\int \frac{\partial y}{y - 2y\cos.\theta + 1}$, cuius integrale eſt $\frac{1}{n \sin.\theta}$ A tang. $\frac{y \sin.\theta}{1 - y\cos.\theta}$, cuius valor, caſu $x = 1$, fit $\frac{1}{n \sin.\theta}$ A tang. $\frac{\sin.\theta}{1 - \cos.\theta} = \frac{(\pi - \theta)}{2n \sin.\theta}$, qui ductus in $-2\cos.\zeta$ praebet illam ipſam partem hinc oriundam in forma ſupra inuenta, quamobrem ſuperfluum foret hunc terminum in calculo retinere, vnde hanc formam integralem ſumus contemplaturi: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$, cuius valorem caſu $x = 1$ inuenimus $= \frac{\pi \sin.\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin.\theta \sin.\frac{p\pi}{n}}$, quem breuitatis gratia littera P deſignemus, ita vt ſit $P = \frac{\pi \sin.\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin.\theta \sin.\frac{p\pi}{n}}$. Tum vero etiam inuenimus caſu $x = \infty$ valorem huius formulae eſſe $= 2P$.

II. Secundo loco probe notari oportet, exponentem p neceſſario minorem eſſe debere quam exponentem n, quia alioquin fractio foret ſpuria, et variabilis x in numeratore tot vel plures dimenſiones eſſet habitura quam in denominatore. Quoties autem hoc euenit, integrali praeter partes, quas per reſolutio-

lutionem in fractiones partiales ſumus nacti, quantitas quaedam integra adiici debet, id quod in noſtra ſolutione non eſt factum, quamobrem tales caſus hinc prorſus excludi conuenit. Ceterum quolibet caſu has partes integras facile erit adiicere ad partes quas nobis noſtra methodus ſuppeditabit.

III. Ex ipſa ſolutione, quam dedimus, perſpicuum eſt exponentem p neceſſario integrum ſtatui debere, quia alias operationes ibi exhibitae locum habere non poſſent; vnde eo magis mirum videbitur, quod concluſiones inuentae ſubſiſtere queant, etiamſi iſte exponens p fuerit numerus fractus quicunque, dummodo minor quam n, propterea quod hos caſus ſemper ad exponentes integros reducere licet. Ad hoc oſtendendum ponamus eſſe $p = \frac{q}{\lambda}$, atque forma noſtra, poſito $x = z^{\lambda}$, reducetur ad hanc formam: $\lambda \int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^q + z^{-q}}{z^{\lambda n} - 2\cos\theta + z^{-\lambda n}}$, vbi cum omnes exponentes ſint integri, ac pro terminis integrationis, qui erant $x = 0$, $x = 1$ et $x = \infty$, etiam fiat $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$, pro $z = 1$ valor integralis erit $\frac{\lambda \pi \text{ſin.} \frac{q}{\lambda n}(\pi - \theta)}{\lambda n \text{ſin.} \theta \text{ſin.} \frac{q\pi}{\lambda n}}$, qui, reſtituto loco $\frac{q}{\lambda}$ valore p, abit in hunc: $\frac{\pi \text{ſin.} \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \text{ſin.} \theta \text{ſin.} \frac{p\pi}{n}}$, quae expreſſio cum ſuperiore prorſus congruit. Atque hinc intelligitur, quominus etiam exponenti p valores irrationales tribuantur, dumne ſuperent exponentem n, ſemper hoc euenire debere.

IV. Hic iam quaeſtio oritur maximi momenti, vtrum etiam exponenti p dare liceat valores imaginarios nec ne? Hoc autem affirmandum videtur, quandoquidem imaginaria certe non ſint maiora quam n; vnde concludimus, dummodo valor ipſius p ita capiatur imaginarius, vt ipſa formula differentialis

maneat realis, tum etiam concluſiones noſtras veritati conſentaneas eſſe manſuras. Hoc autem euenit, ſi ſtatuamus $p = q\sqrt{-1}$; tum enim, cum in genere ſit $e^{\Phi\sqrt{-1}} + e^{-\Phi\sqrt{-1}} = 2 \text{ cof. } \Phi$, quia noſtro caſu eſt $\Phi = q\, l\, x$, ipſa formula integralis erit

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{2 \text{ cof. } q\, l\, x}{x^n - 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}}.$$

Nunc igitur videamus quamnam formam noſtrum integrale caſu $x = 1$ ſit recepturum, et quoniam ſinus angulorum imaginariorum ſunt etiam imaginarii, quandoquidem

$$e^{\Phi\sqrt{-1}} - e^{-\Phi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{-1}} \text{ ſin. } \Phi,$$

loco Φ ſcribamus $\psi\sqrt{-1}$, eritque

$$\text{ſin. } \psi\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(e^{-\psi} - e^{+\psi}\right),$$

vnde in forma integrali erit $\frac{p}{n} = \frac{q\sqrt{-1}}{n}$, ideoque loco ψ ſcribamus $\frac{q}{n}(\pi - \theta)$ pro numeratore, et $\frac{q\pi}{n}$ pro denominatore, ex quo valor integralis ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſus erit

$$\frac{\pi}{n \text{ ſin. } \theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}.$$

Hinc igitur formemus ſequens Theorema notatu digniſſimum:

Quodſi iſta formula integralis:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cof. } q\, l\, x}{x^n - 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}},$$

a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extendatur, eius volor ſemper erit* $= \frac{\pi}{2n \text{ ſin. } \theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$. *Sin autem integrale extendatur ab* $x = 0$ $x = \infty$, *valor prodibit duplo maior.*

Hoc

Hoc theorema vtique eo maiorem attentionem meretur, quod nulla via patet, eius veritatem directe demonſtrandi.

V. Reuertamur autem ad formam integralem primo expoſitam, et quoniam numerator duabus conſtat partibus x^p et x^{-p}, vnde ſumma integralium pro $x = 1$ inuenta eſt $= P$, at pro caſu $x = \infty$ duplo maior $= 2P$, hic maxime notatu dignum occurrit, quod pro termino $x = \infty$ vtraque pars numeratoris eundem producat valorem $= P$. Semper enim erit, integrale ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extendendo,

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}} = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}} = P.$$

Ad hoc oſtendendum ponamus pro poſteriore formula $x = \frac{1}{z}$, eaque induet hanc formam:

$$-\int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^{-p} + z^{+p}}{z^{-n} - 2\cos.\theta + z^n},$$

quae cum ſit priori formae prorſus ſimilis, ſolo ſigno — excepto, eius valor a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$, negatiue ſumtus, primae formulae erit aequalis. Cum autem ſit $z = \frac{1}{x}$, iſti termini integralis erunt ab $x = \infty$ vsque ad $x = 0$, qui ergo ſi inuertantur, etiam ſignum integralis erit mutandum, ſicque ipſi priori formulae aequale euadet; quare cum ambae formulae coniunctae ſummam habeant $= 2P$, vtriusque ſeorſim ſumtae valor erit $= P$, vnde deducitur ſequens theorema notatu pariter digniſſimum:

Iſtius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{\pm p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$ *valor a termino* $x = 0$ *vsque ad* $x = \infty$ *extenſus ſemper eſt*

$$= P = \frac{\pi \sin.\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin.\theta \sin.\frac{p\pi}{n}},$$

Euidens

Euidens autem est hanc aequalitatem pro casu $x = 1$, neutiquam locum habere posse.

VI. Quoniam in nostra formula differentiali tantum occurrit terminus $2 \cos. \theta$, cuius valor idem manet, etiamsi pro θ sumeremus $\theta \pm 2i\pi$, maxime hic mirum videri debet, quod tum valor integralis maxime diuersus sit prodituru, scilicet $= \frac{\pi \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta \pm 2i\pi)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}}$, vnde merito quaeritur, quisnam horum valorum veritati sit conformis, ad quod certe nihil aliud responderi potest, nisi quod omnes veritati aeque consentanei sint censendi, id quod eo minus mirum videri debet, quod omnes huiusmodi formulae integrales reuera sunt functiones multiformes, atque adeo infinitiformes, id quod ex hoc exemplo simpliciſſimo: $\int \frac{\partial x}{1+xx}$ intelligi potest. Cum enim eius integrale exhibeat arcum circuli cuius tangens est x, tales autem arcus innumerabiles dentur, quorum eadem sit tangens $= x$, necesse est, vt omnes aeque iu hac forma integrali contineantur. Quin etiam in nostro valore inuento P loco π quoque scribere licet $\pi + 2i\pi$, eiusque valor nihilominus cum veritate consistere poterit. Verum in huiusmodi integrationibus perpetuo valores minimi desiderari solent, hocque modo omnis difficultas e medio est sublata.

VII. Deinde in Analysi supra adhibita suppossuimus omnes factores denominatoris inter se esse inaequales, id quod vtique semper euenit, nisi sit $\cos. \theta = \pm 1$, quippe quibus casibus denominator quadratum inuoluit: fit enim is

$$= x^{-n}(x^n \pm 1)^2;$$

ex quo patet omnes factores $x^n \pm 1$ bis occurrere debere. Hoc incommodum etiam innuitur per ipsam nostram formulam P, quae

quae casu $\theta = 0$ valorem indicat infinitum. Verum posito $\theta = \pi$, singulare phaenomenon se offert, dum formulae pro P inuentae tam numerator quam denominator euanescunt, atque adeo fractio determinatum nanciscitur valorem. Ponamus enim $\theta = \pi - \omega$, existente ω infinite paruo, eritque $\sin.\theta = \sin.\omega = \omega$; at ob $\pi - \theta = \omega$, in numeratore habebimus $\sin.\frac{p\omega}{n} = \frac{p\omega}{n}$, vnde valor ipsius P resultat $\frac{\pi p}{n n \sin.\frac{p\pi}{n}}$, qui cum penitus sit determinatus, nullum plane dubium superesse potest, quin cum veritate conspiret, vnde sequens enascitur Theorema maxime memorabile:

Theorema.

Proposita formula differentiali

$$\frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 1 + x^{-n}} = \frac{x^{n-1}\,\partial x\,(x^p + x^{-p}}{(x^n + 1)^2},$$

si eius integrale a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extendatur, eius valor semper erit* $\frac{\pi p}{n n \sin.\frac{p\pi}{n}}$; *sin autem vsque ad terminum* $x = \infty$ *extendatur, eius valor erit duplo maior* $= \frac{2\pi p}{n n \sin.\frac{p\pi}{n}}$.

Demonstratio huius Theorematis directa.

Formula ista integralis resoluatur sequenti modo:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{(1 + x^n)^2} = \frac{Q}{1 + x^n} + \int \frac{\partial x}{x} \frac{R}{1 + x^n}.$$

Sumantur igitur differentialia simulque ducantur in $\frac{x}{\partial x}$, positoque $\partial Q' = Q\,\partial x$, orietur ista aequatio:

$$\frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{(1 + x^n)^2} = \frac{Q' x}{1 + x^n} - \frac{n Q x^n}{(1 + x^n)^2} + \frac{R}{1 + x^n},$$

quae per $1 + x^n$ multiplicata hoc modo repraesentetur:

$$\frac{x^{n+p} + x^{n-p} + n\,Q\,x^n}{1 + x^n} = Q'x + R,$$

vbi iam Q ita accipi debet, vt illa fractio ad integrum reuocetur. Facile autem patet, hoc fieri statuendo

$$n\,Q = x^p + x^{n-p},$$

tum enim illa fractio fiet

$$\frac{x^{n-p} + x^{2n-p}}{1 + x^n} = x^{n-p},$$

ita vt nunc habeamus $x^{n-p} = Q'x + R$. Cum igitur sit $Q = \frac{x^{n-p} - x^p}{n}$, erit

$$Q'x = \frac{(n-p)\,x^{n-p} - p\,x^p}{n},$$

hincque colligitur $R = \frac{p}{n}(x^{n-p} + x^p)$, quocirca formula integralis proposita reducta est ad hanc formam:

$$\frac{x^{n-p} - x^p}{n(1 + x^n)} + \frac{p}{n}\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n-p} + x^p}{1 + x^n},$$

quod integrale ita est sumendum, vt euanescat posito $x = 0$. Nunc igitur statuamus $x = 1$, ac prior pars absoluta euanescit, formulae autem integralis valor, per ea quae dudum sunt inuenta, prodit $\frac{p}{n} \cdot \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi p}{n n \sin. \frac{p\pi}{n}}$, qui ergo cum ante inuento perfecte congruit.

VIII. Tribuatur nunc etiam in hac postrema forma exponenti p valor imaginarius, ponendo $p = q\sqrt{-1}$, et cum, vt ante vidimus, hinc fiat $x^p + x^{-p} = 2 \cos. q\,l\,x$, formula integralis proposita erit $= 2\int \frac{\partial x}{x} \frac{x^n \cos. q\,l\,x}{(1 + x^n)^2}$. Pro eius valore

valore autem iam ante vidimus fore

$$\text{fin.}\frac{\pi q\sqrt{-1}}{n} = \frac{e^{-\frac{\pi q}{n}} - e^{+\frac{\pi q}{n}}}{2\sqrt{-1}},$$

quamobrem valor noſtrae formulae, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſus, erit $\frac{2\pi q}{nn(e^{\frac{\pi q}{n}} - e^{-\frac{\pi q}{n}})}$, vnde deducimus ſequens theorema omni attentione dignum.

Theorema.

Si valor iſtius formulae integralis: $\int \frac{x^{n-1}\partial x(x^p + x^{-p})}{(1+x^n)^2}$, *a termino* $x = 0$ *vsque* $x = 1$ *extendatur, is ſemper aequabitur huic formulae:* $\frac{\pi q}{nn(e^{\frac{\pi q}{n}} - e^{\frac{\pi q}{n}})}$. Cuius autem Theorematis demonſtratio ex principiis iam cognitis vix elici poſſe videtur.

IX. Praeterea etiam perſpicuum eſt, methodum, qua vſi ſumus ad noſtram formulam integrandam, ſubſiſtere non poſſe, niſi terminus medius denominatoris binario ſit minor, quam ob cauſſam eum hac forma $2\cos.\theta$ expreſſimus. Quamobrem hinc oritur quaeſtio maximi momenti: vtrum noſtrae concluſiones etiamnunc valeant, ſi terminus ille medius binario maior acciperetur, ſiue ſi angulus θ foret imaginarius, nec ne? Verum etiam hoc caſu nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin formula noſtra finalis etiamnunc veritati conſentanea ſit futura. Ante omnia autem hic eſt obſeruandum, illi termino medio $2\cos.\theta$ valorem negatiuum tribui conuenire, quia alioquin ipſe denominator in nihilum abiret, dum quantitas noſtra variabilis x a termino 0 vsque ad 1 augetur. Hanc ob rem ſtatuamus angulum $\theta = \pi - \eta$, et valor noſter integralis erit

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2\,\text{cof.}\,\eta + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi\,\text{fin.}\,\frac{p\eta}{n}}{n\,\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\frac{\pi p}{n}}.$$

In hac igitur forma faciamus angulum η imaginarium, ponendo $\eta = \Phi\sqrt{-1}$, eritque, per ea quae iam ſupra obſeruauimus, $2\,\text{cof.}\,\Phi\sqrt{-1} = e^{\Phi} + e^{-\Phi}$, ita vt iam noſter denominator ſit

$$x^n + e^{\Phi} + e^{-\Phi} + x^{-n} = \frac{1}{x^n}(x^n + e^{\Phi})(x^n + e^{-\Phi}),$$

quem idcirco ſtatim in duos factores reales formae $x + k$ reſoluere licet; tum vero fiet

$$\text{fin.}\,\theta = \text{fin.}\,\Phi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\Phi} - e^{+\Phi}}{2\sqrt{-1}},$$

ſimilique modo erit

$$\text{fin.}\,\tfrac{p}{n}\eta = \text{fin.}\,\tfrac{p}{n}\Phi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\frac{p\Phi}{n}} - e^{+\frac{p\Phi}{n}}}{2\sqrt{-1}},$$

vnde formula noſtra integralis emergit realis

$$= \frac{\pi\,(e^{-\frac{p\Phi}{n}} - e^{+\frac{p\Phi}{n}})}{n\,(e^{-\Phi} - e^{+\Phi})\,\text{fin.}\,\frac{p\pi}{n}}.$$

Statuamus autem hic breuitatis gratia $e^{\Phi} = f$, vt ſit $e^{-\Phi} = \frac{1}{f}$, atque noſtra formula integralis ſequentem induet formam:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi\,(f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}})}{n\,(f - f^{-1})\,\text{fin.}\,\frac{p\pi}{n}},$$

id quod tanquam Theorema omni attentione dignum ſpectari poteſt; vbi per ſe intelligitur, valorem eiusdem integralis, vsque ad $x = \infty$ extenſum, fore duplo maiorem.

X. Quodſi iam in hac forma etiam exponenti p valorem imaginarium tribuamus, pariter nullo modo dubitari poterit,

iit, quin concluſio noſtra vera ſit manſura. Ponamus igitur $p = q\sqrt{-1}$, eritque vt ante $x^p + x^{-p} = 2 \text{ cof. } q\, l\, x$; tum vero erit ſin. $\frac{p\pi}{n} = \frac{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}{2\sqrt{-1}}$, pro integralis autem numeratore erit $f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}} = 2\sqrt{-1}$ ſin. $\frac{q}{n} l f$. His igitur valoribus ſubſtitutis ſequens nanciſcimur

Theorema.

Valor iſtius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cof. } q\, l\, x}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}}$, *a termino* $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extenſus, ſemper aequabitur formulae* $\frac{2\pi \text{ ſin. } \frac{q}{n} l f}{n(f - f^{-1})(e^{\frac{q\pi}{n}} - e^{-\frac{q\pi}{n}})}$.

XI. Deinde iam pridem obſeruaui, omnia huiusmodi integralia ſatis commode per ſeries infinitas exprimi poſſe. Cum enim iſta fractio:

$$\frac{x^p}{x^n - 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}} = \frac{x^{n+p}}{x^{2n} - 2 x^n \text{ cof. } \theta + 1},$$

reſoluatur in hanc ſeriem:

$$\frac{1}{\text{ſin. } \theta}(x^{n+p} \text{ ſin. } \theta + x^{2n+p} \text{ ſin. } 2\theta + x^{3n+p} \text{ ſin. } 3\theta \text{ etc.})$$

integrale iſtud: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^{2n} - 2 x^n \text{ cof. } \theta + 1}$, a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſum, aequabitur huic ſeriei infinitae:

$$\frac{1}{\text{ſin. } \theta}\left(\frac{\text{ſin. } \theta}{n+p} + \frac{\text{ſin. } 2\theta}{2n+p} + \frac{\text{ſin. } 3\theta}{3n+p} + \frac{\text{ſin. } 4\theta}{4n+p} + \text{etc.}\right)$$

Hinc ergo, ſi p negatiue caperemus, tum formula noſtra principalis $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}}$, ab $x = 0$ ad $x = 1$ ex-

tenſa, ſemper aequabitur huic ſeriei infinitae geminatae:

$$\frac{1}{\text{ſin. }\theta}\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{ſin. }\theta}{n+p}+\frac{\text{ſin. }2\theta}{2n+p}+\frac{\text{ſin. }3\theta}{3n+p}+\frac{\text{ſin. }4\theta}{4n+p}\ \text{etc.}\\ +\frac{\text{ſin. }\theta}{n-p}+\frac{\text{ſin. }2\theta}{2n-p}+\frac{\text{ſin. }3\theta}{3n-p}+\frac{\text{ſin. }4\theta}{4n-p}\ \text{etc.}\end{array}\right\},$$

quae binis homologis coniungendis contrahitur in hanc ſeriem:

$$\frac{2n}{\text{ſin. }\theta}\left(\frac{\text{ſin. }\theta}{nn-pp}+\frac{2\text{ſin. }2\theta}{4nn-pp}+\frac{3\text{ſin. }3\theta}{9nn-pp}+\frac{4\text{ſin. }4\theta}{16nn-pp}+\text{etc.}\right)$$

XII. Hinc iam manifeſto pro caſu, quo ponitur $p = q\sqrt{-1}$, iſta ſeries infinita exoritur:

$$\frac{2n}{\text{ſin. }\theta}\left(\frac{\text{ſin. }\theta}{nn+qq}+\frac{2\text{ſin. }2\theta}{4nn+qq}+\frac{3\text{ſin. }3\theta}{9nn+qq}+\frac{4\text{ſin. }4\theta}{16nn+qq}+\text{etc.}\right)$$

quae ergo exprimit valorem huius formulae integralis:

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{\text{cof. }q\,l\,x}{x^n-2\,\text{cof. }\theta+x^{-n}},$$

ſcilicet ab $x=0$ ad $x=1$ extenſae, ita vt iſtius ſeriei ſumma finito modo expreſſa ſit etiam

$$\frac{\pi}{n\,\text{ſin. }\theta}\cdot\left(\frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)}-e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}}-e^{+\frac{q\pi}{n}}}\right).$$

Quin etiam facile intelligitur hic quoque angulum θ imaginarium accipi poſſe. Vidimus enim poſito $\theta = \Phi\sqrt{-1}$ fore

$$\text{ſin. }\theta=\frac{e^{-\Phi}-e^{+\Phi}}{2\sqrt{-1}},\ \text{hincque in genere}$$

$$\text{ſin. }\lambda\theta=\frac{e^{-\lambda\Phi}-e^{+\lambda\Phi}}{2\sqrt{-1}}.$$

Quare ſi ſtatuamus $e^{\Phi}=f$, erit $\frac{\text{ſin. }\lambda\theta}{\text{ſin. }\theta}=\frac{f^{\lambda}-f^{-\lambda}}{f-\frac{1}{f}}$, vnde ſeries illa ſatis concinnam formam accipiet.

XII.

XII. Denique operationes, quibus in integratione noſtrae formulae ſumus vſi, conſiſtere nequeunt, niſi exponens n fuerit numerus integer. Interim tamen valor integralis, quem inuenimus pro caſu vel $x = 1$ vel $x = \infty$, veritati conformis deprehenditur, non ſolum quando pro n numerus fractus quicunque ſed etiam adeo imaginarius accipitur, quorum prius facile oſtenditur. Sit enim $n = \frac{m}{\lambda}$, ac ponatur $x = y^{\lambda}$, atque ob $\frac{\partial x}{x} = \frac{\lambda \partial y}{y}$, orietur haec forma integralis exponentibus integris contenta: $\int \frac{\lambda \partial y}{y} \cdot \frac{y^{\lambda p} + y^{-\lambda p}}{y^m - 2 \cos. \theta + y^{-m}}$, cuius ergo valor caſu $x = 1$ debet eſſe ſecundum formulam inuentam

$$\frac{\lambda \pi}{m} \cdot \frac{\sin. \frac{\lambda p}{m} (\pi - \theta)}{\sin. \theta \sin. \frac{\lambda p \pi}{m}},$$

qui, ſi iam loco m valor λn reſtituatur, manifeſto abit in ipſam noſtram formulam ſupra inuentam: $\frac{\pi}{n} \frac{\sin. \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{\sin. \theta \sin. \frac{p \pi}{n}}$. Hinc autem nulli amplius dubio relinquitur, quin veritas haec ſubſiſtat, etiamſi n fuerit numerus imaginarius. Ponamus igitur $n = m \sqrt{-1}$; et formula integralis reducetur ad hanc formam: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{2 \cos. m l x - 2 \cos. \theta}$, cuius ergo valor caſu $x = 1$ certe erit $\frac{p}{m \sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\frac{p}{m}(\pi - \theta)} - e^{-\frac{p}{m}(\pi - \theta)}}{\sin. \theta \left(e^{\frac{\pi p}{m}} - e^{-\frac{\pi p}{m}}\right)}$, vbi mirum videbitur iſtum valorem ſemper eſſe imaginarium, licet ipſa formula differentialis, dum variabilis x, a termino 0 vsque ad terminum $x = 1$, maneat realis, id quod merito maxime videtur paradoxum. Interim tamen non deſunt caſus, quibus valor integralis formulae differentialis realis manifeſto euadit imaginarius, id quod in iſta formula ſimpliciori $\int \frac{\partial x}{x \cos. m l x}$ oſtendiſſe ſuffi-

ſufficiet, quae vtique, dum x a 0 ad 1 augetur, conſtanter manet realis. Ad hanc ergo formulam integrandam ſtatuamus $l\,x = -z$, vbi notetur, dum x a 0 vsque ad 1 progreditur, tum quantitatem z ab ∞ vsque ad 0 decreſcere. Nunc igitur formula noſtra integralis erit $\int \frac{-\partial z}{cof.\,m\,z}$, cum vero conſtet eſſe $\int \frac{\partial \Phi}{ſin.\,\Phi} = l\,\text{tang.}\frac{1}{2}\Phi$, ſumamus $\Phi = 90^\circ - m\,z$, eritque $\partial\Phi = -m\,\partial z$, hincque

$$\int \frac{-m\,\partial z}{cof.\,m\,z} = +l\,\text{tang.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}m\,z),$$

quod integrale manifeſto euaneſcit pro termino $z = 0$, dum autem ab hoc termino quantitas z in infinitum vsque augetur, infinities tangens huius anguli fiet negatiua, eiusque logarithmus propterea imaginarius, vnde non amplius mirabimur, quod formulae differentialis realis integrale euadere poſſit certis caſibus imaginarium.

XIII. Hoc igitur modo euictum eſt formulae noſtrae differentialis propoſitae $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\,cof.\,\theta + x^{-n}}$, integrale aſſignatum a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ ſemper cum veritate conſiſtere, quicunque valores ternis litteris n, p et θ, tribuantur, ſiue integri, ſiue fracti, ſiue etiam imaginarii. Interim tamen dantur caſus iam initio indicati, quibus iſti valores integrales a veritate aberrabunt, quippe quod ſemper vſu venire debet, quoties exponens p maior eſt exponente n, quam ob cauſſam ſedulo excludere debemus omnes caſus, quibus formula $p - n$ euadit realis et poſitiua. His autem exceptis variae formulae, ad quas hic ſumus perducti, ita ſunt comparatae, vt maxima attentione dignae videantur, ſimulque non contemnenda incrementa Scientiae analyticae promittant.

DE

DE SVMMO VSV CALCVLI IMAGINARIORVM IN ANALYSI.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

Quanta incrementa Calculo Imaginariorum per vniuerſam Analyſin accepta ſint referenda, nunc quidem amplius nemo dubitabit. Nuper equidem conatus ſum integrationem formularum rationalium a Calculo Imaginariorum penitus liberare; veruntamen hoc negotium in caſibus, vbi denominator plures habet factores inter ſe aequales, minus feliciter ſucceſſit. Quin etiam non ita pridem in tales formulas integrales incidi, quae quomodo ſine ſubſidio Imaginariorum tractari queant, nullo adhuc modo perſpicio. Cum enim (*) oſtendiſſem, huius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}}$, valorem a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſum eſſe $\frac{\pi \sin.\frac{\theta p}{n}}{n \sin.\theta \sin.\frac{\pi p}{n}}$, denotante π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$, inde facile deducitur haec concluſio maxime memorabilis: quod huius formulae integralis

(*) Vid. Diſſertationem praecedentem pag. 20.

gralis: $\int \frac{\partial x}{x l x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}}$ valor, pariter a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſus, aequetur iſti integrali:

$$\frac{\pi}{n \text{ ſin. } \theta} \int \frac{\partial p \text{ ſin. } \frac{\theta p}{n}}{\text{ſin. } \frac{\pi p}{n}},$$

vbi ſcilicet quantitas p tanquam variabilis ſpectatur, et integrale ita capitur, vt euaneſcat poſito $p = 0$. Quodſi ergo nunc faciamus $\frac{p}{n} = \Phi$, integrari oportet huiusmodi formulam differentialem: $\frac{\partial \Phi \text{ſin. } m\Phi}{\text{ſin. } n\Phi}$. Quemadmodum igitur iſta integratio auxilio Imaginariorum tractari debeat, hic ſum oſtenſurus.

De integratione formulae

$$\int \frac{\partial \Phi \text{ ſin. } m\Phi}{\text{ſin. } n\Phi}.$$

§. 1. Ante omnia hanc formulam ad quantitates algebraicas ordinarias reuocari conuenit, id quod commodius quam per Imaginaria praeſtari nequit. Hunc in finem ſtatuamus breuitatis gratia $t = \text{cof. } \Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \Phi$ et $u = \text{cof. } \Phi - \sqrt{-1} \text{ ſin. } \Phi$, ita vt ſit $tu = 1$; tum vero erit

$$\partial t = -\partial \Phi (\text{ſin. } \Phi - \sqrt{-1} \text{ cof. } \Phi) \text{ ideoque}$$
$$\partial t \sqrt{-1} = -\partial \Phi (\text{cof. } \Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \Phi) = -i \partial \Phi,$$

vnde ergo fiet

$$\partial \Phi = -\frac{\partial t \sqrt{-1}}{t} = \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}}.$$

§. 2. His autem formulis conſtitutis, ex elementis Calculi Imaginariorum conſtat eſſe

$$t^\lambda = \text{cof. } \lambda\Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \lambda\Phi \text{ et}$$
$$u^\lambda = \text{cof. } \lambda\Phi - \sqrt{-1} \text{ ſin. } \lambda\Phi;$$

vnde

vnde ergo colligitur $t^\lambda - u^\lambda = 2\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\lambda\Phi$, ideoque

$$\text{fin.}\,\lambda\Phi = \frac{t^\lambda - u^\lambda}{2\sqrt{-1}}.$$

Hinc ergo si loco λ scribamus numeros m et n, erit

$$\frac{\text{fin.}\,m\Phi}{\text{fin.}\,n\Phi} = \frac{t^m - u^m}{t^n - u^n},$$

quocirca, si integrale quaesitum littera S designemus, vt sit $S = \int \frac{\partial\Phi\,\text{fin.}\,m\Phi}{\text{fin.}\,n\Phi}$, facta substitutione nunc habebimus

$$\partial S = \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^m - u^m}{t^n - u^n}.$$

Quia autem est $u = \frac{1}{t} = t^{-1}$, formula proposita ad speciem consuetam, solam variabilem t inuoluentem, est reducta, cum sit

$$\partial S\sqrt{-1} = \frac{\partial t}{t}\,\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}},$$

cuius formulae adeo integralis iam passim euoluta reperitur. Hic autem probe meminisse oportet, ipsam quantitatem t non esse realem, cum sit $t = \text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\Phi$.

§. 3. Manifestum hic est ambos numeros m et n semper tanquam integros spectari posse, cum iis ratio indicetur, quam ambo anguli $m\Phi$ et $n\Phi$ inter se tenent. Hic igitur ante omnia dispiciendum erit, vtrum exponens m maior minorue sit exponente n; quandoquidem notum est, si fuerit $m > n$, fractionem nostram esse spuriam, atque partes integras ante ex ea elici debere quam integratio suscipiatur. Hos ergo casus hic primum euolui conueniet. Sit igitur primo $m = n + \lambda$, ita tamen vt sit $\lambda < n$, ac facile patebit, fractionem $\frac{t^{n+\lambda} - t^{-(n+\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$ continere partem integram $t^\lambda + t^{-\lambda}$, qua ab ista fractione sub-

lata remanet $\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$, quae fractio non amplius eſt ſpuria. Ex parte integra autem ducta in $\frac{\partial t}{t}$ oritur integrale $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{\lambda}$. At vero eſt $t^\lambda - t^{-\lambda} = t^\lambda - u^\lambda = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\lambda\Phi$, quod per $\sqrt{-1}$ diuiſum dat partem integralis hinc oriundam $= \frac{2\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi}{\lambda}$.

§. 4. Sin autem fuerit $m > 2n$, ſiue $m = 2n + \lambda$, tum fractio noſtra $\frac{t^{2n+\lambda} - t^{-2n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$ hanc continebit partem integram: $t^{n+\lambda} + t^{-n-\lambda}$, qua ablata remanet adhuc iſta fractio: $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae iam eſt genuina ob $\lambda < n$. At vero ex parte integra ducta in $\frac{\partial t}{t}$, oritur integrando

$$\frac{t^{n+\lambda} - t^{-n-\lambda}}{n+\lambda} = \frac{t^{n+\lambda} - u^{n+\lambda}}{n+\lambda},$$

cuius valor eſt: $\frac{2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda}$, qui per $\sqrt{-1}$ diuiſus praebet partem integralis hinc natam $= \frac{2\,\text{ſin.}\,(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda}$.

§. 5. Simili modo ſi fuerit $m > 3n$, ac ponatur $m = 3n + \lambda$, fractio noſtra erit $\frac{t^{3n+\lambda} - t^{-3n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae continebit partem integram $t^{2n+\lambda} + t^{-2n-\lambda}$; hac autem ablata remanebit adhuc fractio $\frac{t^{n+\lambda} - t^{-n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$; quae etiamnunc eſt ſpuria et continet partem integram $t^\lambda + t^{-\lambda}$, qua ablata demum remanet fractio genuina $\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$. Ex partibus autem integris oriuntur hae partes integralis: $\frac{2\,\text{ſin.}\,(2n+\lambda)\Phi}{2n+\lambda} + \frac{2\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi}{\lambda}$.

§. 6.

§. 6. Ponamus quoque esse $m > 4n$, ideoque $m = 4n + \lambda$, et fractio nostra erit $\frac{t^{4n+\lambda} - t^{-4n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae statim continet partem integram $t^{3n+\lambda} + t^{-3n-\lambda}$, hac autem ablata remanet adhuc ista fractio: $\frac{t^{2n+\lambda} - t^{-2n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae denuo continet partem integram $t^{n+\lambda} + t^{-n-\lambda}$, qua subtracta tandem remanet ista fractio genuina: $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$. Iam vero ex partibus integris obtinentur pro integrali S istae partes:

$$\frac{2 \sin.(3n+\lambda)\Phi}{3n+\lambda} + \frac{2 \sin.(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda}.$$

§. 7. Sit porro etiam $m > 5n$, sive $m = 5n + \lambda$, ac nostra fractio $\frac{t^{5n+\lambda} - t^{-5n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$ primo continebit partem integram $t^{4n+\lambda} + t^{-4n-\lambda}$, qua ablata remanet adhuc ista fractio: $\frac{t^{3n+\lambda} - t^{-3n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae per antecedentia continet adhuc duas partes integras, scilicet $t^{2n+\lambda} + t^{-2n-\lambda}$ et $t^\lambda + t^{-\lambda}$, quibus ablatis remanet tandem ista fractio genuina: $\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$.

§. 8. Ex his casibus iam satis perspicitur, quomodo, si exponens n adhuc maior accipiatur, partes integrae in integrale S ingredientes se sint habiturae, quas idcirco hic coniunctim aspectui exponamus.

I. Si $m = n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \sin.(n+\lambda)\Phi}{\sin. n\Phi} =$

$$\frac{2 \sin. \lambda\Phi}{\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}};$$

II. Si $m = 2n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, sin.(2n+\lambda)\Phi}{sin.\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,sin.(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^{n} - t^{-n}};$$

III. Si $m = 3n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, sin.(3n+\lambda)\Phi}{sin.\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,sin.(2n+\lambda)\Phi}{2n+\lambda} + \frac{2\,sin.\,\lambda\Phi}{\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^{n} - t^{-n}};$$

IV. Si $m = 4n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, sin.(4n+\lambda)\Phi}{sin.\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,sin.(3n+\lambda)\Phi}{3n+\lambda} + \frac{2\,sin.(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^{n} - t^{-n}};$$

V. Si $m = 5n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, sin.(5n+\lambda)\Phi}{sin.\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,sin.(4n+\lambda)\Phi}{4n+\lambda} + \frac{2\,sin.(2n+\lambda)\Phi}{2n+\lambda} + \frac{2\,sin.\,\lambda\Phi}{\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^{n} - t^{-n}};$$

VI. Si $m = 6n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, sin.(6n+\lambda)\Phi}{sin.\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,sin.(5n+\lambda)\Phi}{5n+\lambda} + \frac{2\,sin.(3n+\lambda)\Phi}{3n+\lambda} + \frac{2\,sin.(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^{n} - t^{-n}};$$

etc. etc.

§. 9. His igitur casibus, quibus $m > n$, felicissimo cum successu expeditis, totum negotium reducitur ad integrationem formulae $\frac{\partial \Phi \, sin.\, m\Phi}{sin.\, n\Phi}$, pro casibus quibus est $m < n$; quandoquidem ex modo allatis manifestum est, quomodo illi casus ad hos facillime reducuntur. Tum igitur ope nostrae substitutionis $t = cos.\,\Phi + \sqrt{-1}\, sin.\,\Phi$ peruenitur ad hanc formulam:

$$S\sqrt{-1} = \int \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^{m} - t^{-m}}{t^{n} - t^{-n}},$$

cuius ergo integrationem data opera instituamus.

Inue-

Inueſtigatio integralis

$$\int \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$$

exiſtente $m < n$.

§. 10. Hic ante omnia cuncti factores trinomiales noſtri denominatoris $t^n - t^{-n}$ indagari debebunt, quorum ſingulorum forma ita exhiberi poteſt: $t^1 - 2 \text{ cof. } \omega + t^{-1}$, vbi angulum ω ita definiri oportet, vt poſito $t^1 - 2 \text{ cof. } \omega + t^{-1} = 0$ ſimul ipſe denominator euaneſcat; tum autem exinde colligitur $t = \text{cof. } \omega + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \omega$, vnde ſtatim patet fore

$$t^n = \text{cof. } n\omega + \sqrt{-1} \text{ ſin. } n\omega \text{ et}$$

$$t^{-n} = \text{cof. } n\omega - \sqrt{-1} \text{ ſin. } n\omega,$$

quamobrem noſter denominator reducetur ad hanc formam: $2\sqrt{-1} \text{ ſin. } n\omega$, qui ergo valor nihilo debet aequari.

§. 11. Cum igitur debeat eſſe $\text{ſin. } n\omega = 0$, omnes valores, quos pro $n\omega$ accipere licet, erunt 0π, π, 2π, 3π, 4π, etc. vnde ipſius anguli ω valores erunt $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{1\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, etc. et in genere $\frac{i\pi}{n}$, denotante i numerum integrum quemcunque. Hinc igitur pro omnibus factoribus noſtri denominatoris videntur capi debere n horum valorum; verum manifeſtum eſt, quotcunque tales formulae $t^1 - 2 \text{ cof. } \omega + t^{-1}$ in ſe inuicem multiplicentur, vltimum terminum nunquam prodire poſſe $= t^{-n}$. At vero hic meminiſſe oportet, quae circa huiusmodi integrationes in genere ſunt praecepta: ſcilicet talem factorem trinomialem $tt - 2t \text{ cof. } \omega + 1$, caſu quo $\omega = 0$, non factorem quadratum $(t-1)^2$, ſed tantum ſimplicem $t - 1$ innui, quod idem quoque euenit ſi $\omega = \pi$, tum enim quoque non factor quadratus $(t+1)^2$, ſed tantum ſimplex $t + 1$ eſt ſumendus, quare cum hi ipſi caſus inter valores ipſius ω occurrant, neceſſe eſt vt numerus ho-

horum factorum vnitate augeatur. Hic autem commode vsu venit, vt isti casus ex valoribus $\omega = 0$ et $\omega = \pi$ oriundi e medio tollantur.

§. 12. Cum igitur fractionem nostram $\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$ in meras fractiones simplices resolui oporteat, quarum denominatores sint $t^1 - 2\cos.\omega + t^{-1}$, pro vnaquaque harum fractionum statuamus

$$\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}} = \frac{\Delta}{t - 2\cos.\omega + t^{-1}} + R$$

vbi R complectatur omnes reliquas fractiones, et nunc vtrinque multiplicemus per $t - 2\cos.\omega + t^{-1}$, vt prodeat

$$\frac{(t^m - t^{-m})(t - 2\cos.\omega + t^{-1})}{t^n - t^{-n}} = \Delta + R(t - 2\cos.\omega + t^{-1});$$

vnde si iam ponamus $t - 2\cos.\omega + t^{-1} = 0$, quod fit sumendo $t = \cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega$, hinc colligitur numerator nostrae fractionis

$$\Delta = (t^m - t^{-m})\frac{t - 2\cos.\omega + t^{-1}}{t^n - t^{-n}}.$$

Tum autem manifestum est in hac fractione, ad quam sumus deducti, hoc casu tam numeratorem quam denominatorem in nihilum abire, vnde iuxta regulam notissimam eorum loco sua scribamus differentialia, atque ista fractio induet hanc formam: $\frac{t^1 - t^{-1}}{n(t^n + t^{-n})}$, vbi manifesto erit $t - t^{-1} = 2\sqrt{-1}\sin.\omega$, at $t^n + t^{-n} = 2\cos.n\omega$, ita vt nunc valor huius fractionis futurus sit $\frac{\sqrt{-1}\sin.\omega}{n\cos.n\omega}$, qui ductus in $t^m - t^{-m} = 2\sqrt{-1}\sin.m\omega$ dabit numeratorem nostrum quaesitum $\Delta = -\frac{2\sin.\omega\sin.m\omega}{n\cos.n\omega}$.

Quia

Quia autem eſt ſin. $n\omega = 0$, ſemper erit vel cof. $n\omega = 1$, vel cof. $n\omega = -1$, prouti, ſtatuendo in genere $\omega = \frac{i\pi}{n}$, numerus i fuerit vel par, vel impar.

§. 13. Inuenta igitur hac fractione: $-\frac{2 \text{ſin.}\,\omega \text{ſin.}\,m\omega}{n \text{coſ.}\,n\omega}$, ea in $\frac{\partial t}{t}$ multiplicetur et integretur, ſicque ad iſtam pertingimus formulam integralem:

$$-\frac{2 \text{ſin.}\,\omega \text{ſin.}\,m\omega}{n \text{coſ.}\,n\omega} \cdot \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{1}{t - 2 \text{coſ.}\,\omega + t^{-1}},$$

cuius quidem integratio nulla amplius laborat difficultate: perduceret enim ad arcum circuli cuius tangens $= \frac{t \text{ſin.}\,\omega}{1 - t \text{coſ.}\,\omega}$; verum quia ipſa quantitas t iam eſt imaginaria, hinc parum lucraremur, quoniam neceſſe foret iſtum arcum imaginarium ad quantitates reales reducere, ſiquidem conſtat, arcus imaginarios ad logarithmos reales reduci.

§. 14. Vt igitur hunc laborem euitemus, loco noſtrae variabilis t ipſum angulum Φ rurſus in calculum reuocemus, et quia iam vidimus eſſe $\frac{\partial t}{t} = \partial\Phi\sqrt{-1}$, tum vero $t + u = 2 \text{coſ.}\,\Phi$, hisce valoribus ſubſtitutis formula integranda erit $-\frac{\text{ſin.}\,\omega \text{ſin.}\,m\omega}{n \text{coſ.}\,n\omega} \cdot \frac{\partial\Phi\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\omega}$, quae formula per $\sqrt{-1}$ diuiſa praebet partem ipſius integralis quaeſiti S, ita vt ſit

$$S = -\frac{\text{ſin.}\,\omega \text{ſin.}\,m\omega}{n \text{coſ.}\,n\omega} \int \frac{\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\omega},$$

ſiquidem angulo ω ſucceſſiue omnes ſuos valores tribuamus; vbi per ſe manifeſtum eſt, in hac integratione angulum ω eſſe conſtantem ſolumque Φ variabilem.

§. 15. Ex coëfficiente huius formulae ſtatim patet, quod iam ſupra innuimus, ex valoribus ipſius ω primo et extremo, ſcilicet $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, partes integralis ſponte e medio

dio tolli, ita vt nunc sufficiat loco ω successiue substitui hos valores: $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots\ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$. Vbi recordandum, dum statuitur $\omega = \frac{i\pi}{n}$, quoties i fuerit numerus par, fore $\cos. n\omega = +1$; sin autem sit i numerus impar, tum fore $\cos. n\omega = -1$. Quibus obseruatis totum negotium reductum est ad integrationem huius formulae satis memorabilis: $\int \frac{\partial\Phi}{\cos.\Phi - \cos.\omega}$.

§. 16. Facile quidem foret istam formulam ad quantitates reales consuetas reuocare; interim tamen sequenti modo haec integratio facilius et elegantius absolui potest. Ponamus enim breuitatis gratia $\frac{\partial\Phi}{\cos.\Phi - \cos.\omega} = \partial s$, et secundum calculum angulorum iam satis vulgatum nouimus esse

$$\cos.\Phi - \cos.\omega = 2 \sin.\tfrac{\omega+\Phi}{2} . \sin.\tfrac{\omega-\Phi}{2},$$

sicque habebimus:

$$\partial s = \frac{\partial\Phi}{2 \sin.\frac{\omega+\Phi}{2} \sin.\frac{\omega-\Phi}{2}}, \text{ siue}$$

$$\frac{2\partial s}{\partial\Phi} = \frac{1}{\sin.\frac{\omega+\Phi}{2} . \sin.\frac{\omega-\Phi}{2}},$$

quae fractio, quia denominator duobus constat factoribus, commode resolui potest in duas fractiones huiusmodi:

$$\frac{\alpha \cos.\frac{\omega+\Phi}{2}}{\sin.\frac{\omega+\Phi}{2}} + \frac{\beta \cos.\frac{\omega-\Phi}{2}}{\sin.\frac{\omega-\Phi}{2}},$$

vbi statim patet sumi debere $\beta = \alpha$, tum enim summa harum fractionum prodit $\frac{\alpha \sin.\omega}{\sin.\frac{\omega+\Phi}{2} \sin.\frac{\omega-\Phi}{2}}$, vnde $\alpha = \beta = \frac{1}{\sin.\omega}$. Hinc autem erit

$$\partial s = \frac{1}{2 \sin.\omega} . \left(\frac{\partial\Phi \cos.\frac{\omega+\Phi}{2}}{\sin.\frac{\omega+\Phi}{2}} + \frac{\partial\Phi \cos.\frac{\omega-\Phi}{2}}{\sin.\frac{\omega-\Phi}{2}} \right),$$

in

in quibus formulis numerator manifesto est differentiale denominatoris, vnde concludimus fore

$$S = \frac{1}{\text{sin. } \omega} \sqrt{\frac{\text{sin. } \frac{\omega + \Phi}{2}}{\text{sin. } \frac{\omega - \Phi}{2}}}.$$

§. 17. Inuento iam hoc integrali, in quo cardo totius inuestigationis versabatur, quilibet factor denominatoris in valorem integralem quaesitum S ductus suppeditat istam partem:

$$-\frac{\text{sin. } m\,\omega}{n \cos. n\,\omega} \cdot \sqrt{\frac{\text{sin. } \frac{\omega + \Phi}{2}}{\text{sin. } \frac{\omega - \Phi}{2}}},$$

vbi tantum opus est vt loco anguli ω successiue omnes eius valores debiti substituantur, tum enim aggregatum omnium harum formularum praebebit verum valorem integralis $S = \int \frac{\partial \Phi \text{ sin. } m\Phi}{\text{sin. } n\Phi}$.

§. 18. Quo autem totum integrale succinctius repraesentare valeamus, ponamus breuitatis gratia $\frac{\pi}{n} = 2\alpha$, ita vt valores ipsius ω futuri sint 2α, 4α, 6α, ... $2(n-1)\alpha$; tum vero sit $\Phi = 2\psi$, atque formulae integralis $\int \frac{2\partial\psi \text{ sin. } 2m\psi}{n \text{ sin. } 2n\psi}$ valor completus erit

$$S = \frac{\text{sin. } 2m\alpha}{n} \sqrt{\frac{\text{sin. } \alpha + \psi}{\text{sin. } \alpha - \psi}} - \frac{\text{sin. } 4m\alpha}{n} \sqrt{\frac{\text{sin. } 2\alpha + \psi}{\text{sin. } 2\alpha - \psi}}$$
$$+ \frac{\text{sin. } 6m\alpha}{n} \sqrt{\frac{\text{sin. } 3\alpha + \psi}{\text{sin. } 3\alpha - \psi}} - \frac{\text{sin. } 8m\alpha}{n} \sqrt{\frac{\text{sin. } 4\alpha + \psi}{\text{sin. } 4\alpha - \psi}}$$
$$+ \frac{\text{sin. } 10m\alpha}{n} \sqrt{\frac{\text{sin. } 5\alpha + \psi}{\text{sin. } 5\alpha - \psi}} - \frac{\text{sin. } 12m\alpha}{n} \sqrt{\frac{\text{sin. } 6\alpha + \psi}{\text{sin. } 6\alpha - \psi}},$$

etc.

donec horum membrorum numerus sit $n-1$. Haec autem formula tantum valet quando $m < n$: si enim fuerit $m > n$, iam ante ostendimus, cuiusmodi termini insuper debeant adiungi.

§. 19. Hic obseruandum est haec integralia ita esse sumta, vt euanescant posito $\Phi = 0$, quoniam hoc casu omnes

logarithmi ad vnitatem referuntur. Deinde etiam euidens eſt, ſi angulus ψ augeatur vsque ad α, tum integrale iam in infinitum excreſcere; vnde patet hunc angulum non vltra iſtum terminum augeri conuenire. Verum etiam caſus initio memoratus, qui ad hanc formulam integralem ducit, non poſtulat vt iſte angulus vltra hunc terminum augeatur, quamobrem operae pretium erit integrationem inuentam ad hunc ipſum caſum accommodare.

Problema.

Valorem iſtius formulae integralis:

$$\int \frac{\partial x}{x\, l\, x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}},$$

a termino $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extenſum, per expreſſionem finitam aſſignare.*

Solutio.

§. 20. Quoniam iſtum valorem quaeſitum reduxi ad hanc formulam integralem: $\frac{\pi}{n \sin.\theta} \int \frac{\partial p \sin.\frac{\theta p}{n}}{\sin.\frac{\pi p}{n}}$, primum tenendum eſt, eum finite exprimi non poſſe, niſi angulus θ ad π habeat rationem rationalem. Ponamus ergo hanc rationem eſſe $\theta : \pi = \mu : \nu$, ita vt μ et ν ſint numeri integri, quamobrem pro formula ante tractata ſtatuamus $m = \mu$ et $n = \nu$, vnde fiet angulus $\nu\Phi = \frac{\pi p}{n}$. Ponamus hic breuitatis gratia $\frac{p}{n} = r$, vt habeamus $\Phi = \frac{\pi r}{\nu}$, et valor, quem quaerimus, ob $p = nr$, erit $\frac{\pi}{\sin.\theta} \int \frac{\partial r \sin.\theta r}{\sin.\pi r}$, quare cum hinc fiat $\Phi = \frac{\pi r}{\nu}$, formula ſupra tractata $\int \frac{\partial\Phi \sin. m\Phi}{\sin. n\Phi}$ abibit in hanc: $S = \frac{\pi}{\nu} \int \frac{\partial r \sin.\frac{\mu\pi r}{\nu}}{\sin.\pi r}$, ſicque valor, quem hic quaerimus, erit $\frac{\nu . S}{\sin.\theta}$, ita vt tantum opus ſit valorem ipſius S pro hoc caſu euoluere.

§. 21.

§. 21. Conſideremus nunc primum valorem ipſius ω, qui erat $\omega = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\nu}$, qui pro S produxit partem integralem

$$-\frac{\text{ſin. } m\omega}{n \text{ coſ. } n\omega} \int \frac{\text{ſin. } \frac{\omega+\Phi}{2}}{\text{ſin. } \frac{\omega-\Phi}{2}},$$

erit hic $m\omega = \frac{\mu\pi}{\nu} = \theta$ et coſ. $n\omega = -1$; tum vero

$$\omega + \Phi = \frac{\pi}{\nu}(1+r) \text{ et } \omega - \Phi = \frac{\pi}{\nu}(1-r);$$

Primum igitur hic ſumi debet angulus $\frac{\pi}{2\nu}$, quem breuitatis gratia ponamus $= \varrho$, vt ſit $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$, et prima pars noſtrae formulae S erit $\frac{\text{ſin. } \theta}{\nu} \int \frac{\text{ſin } \varrho(1+r)}{\text{ſin. } \varrho(1-r)}$; ſequentes autem partes erunt

$$-\frac{\text{ſin. } 2\theta}{\nu} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(2+r)}{\text{ſin. } \varrho(2-r)};$$

$$+\frac{\text{ſin. } 3\theta}{\nu} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(3+r)}{\text{ſin. } \varrho(3-r)};$$

etc.

quae partes ductae in $\frac{\nu}{\text{ſin. } \theta}$ praebent ipſum valorem quem noſtrum problema poſtulat, qui ergo erit

$$\frac{\text{ſin. } \theta}{\text{ſin. } \theta} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(1+\varrho)}{\text{ſin. } \varrho(1-\varrho)} - \frac{\text{ſin. } 2\theta}{\text{ſin. } \theta} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(2+r)}{\text{ſin. } \varrho(2-r)}$$
$$+\frac{\text{ſin. } 3\theta}{\text{ſin. } \theta} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(3+\varrho)}{\text{ſin. } \varrho(3-\varrho)} - \frac{\text{ſin. } 4\theta}{\text{ſin. } \theta} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(4+r)}{\text{ſin. } \varrho(4-r)} \text{ etc.}$$

quae membra eo vsque continuari debent, donec eorum numerus fiat $\nu - 1$, vbi pro noſtro problemate tantum notetur eſſe $r = \frac{p}{n}$ et $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$, exiſtente $\theta : \pi = \mu : \nu$, ſiue $\theta = \frac{\mu\pi}{\nu}$, ita vt μ ſit numerus integer. Cum igitur in formula propoſita exponens p neceſſario minor ſit quam n, erit r vnitate minor, ideoque omnes iſtae formulae finitae.

§. 22. Forma igitur generalis omnium partium, ex quibus hoc integrale conſtat, eſt $\pm \frac{\text{ſin. } i\theta}{\text{ſin. } \theta} \int \frac{\text{ſin. } \varrho(i+r)}{\text{ſin. } \varrho(i-r)}$, vbi ſignum ſuperius $+$ valet, quoties i fuerit numerus impar, inferius vero

—, si par. Pro vltima igitur harum partium erit $i = \nu - 1$. Vbi probe notetur, si sumeremus $i = \nu$, partem hinc resultantem sponte esse euanituram, propterea quod $i\varrho = \nu\varrho = \frac{\pi}{2}$, ideoque ambo sinus post logarithmum inter se aequales, ita vt perinde sit, siue membrorum numerus statuatur $= \nu - 1$, siue $= \nu$.

§. 23. Consideremus nunc vltimum membrum nostri valoris integralis, sumendo $i = \nu - 1$, vnde fiet $\text{sin.}(\nu - 1)\theta = \text{sin.}(\mu\pi - \theta)$, qui erit $= \text{sin.}\theta$, si μ fuerit numerus impar, sin autem μ fuerit numerus par, is erit $= -\text{sin.}\theta$. Tum vero erit $i\varrho = (\nu - 1)\varrho = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\nu}$, ideoque

$$\text{sin.}(\nu - 1)\varrho = \text{sin.}(\tfrac{\pi}{2} - \varrho(1 - r) = \text{cos.}\varrho(1 - r).$$

Simili modo pro denominatore erit

$$\text{sin.}\varrho(i - r) = \text{sin.}(\tfrac{\pi}{2} - \varrho(1 + r) = \text{cos.}\varrho(1 + r);$$

ita vt in vltimo membro cosinus eorundem angulorum occurrant, quorum sinus occurrunt in primo membro, quae permutatio etiam reperietur in membro penultimo et secundo, tum vero etiam in antepenultimo et tertio, vnde bina huiusmodi membra in vnum coniungi poterunt.

Casus I. ν par. μ par.

§. 24. Hic autem quatuor casus examinari conuenit, prouti ambo numeri μ et ν fuerint numeri vel pares vel impares. Sint igitur primo ambo pares, vnde coëfficiens vltimi membri erit $+\frac{\text{sin.}\mu\pi - \theta}{\text{sin.}\theta} = -\frac{\text{sin.}\theta}{\text{sin.}\theta}$, ideoque totum membrum vltimum $= -\frac{\text{sin.}\theta}{\text{sin.}\theta} \int \frac{\text{cos.}\varrho(1 - r)}{\text{cos.}\varrho(1 + r)}$, quamobrem primum membrum cum vltimo coniunctum dabit

$$\frac{\text{sin.}\theta}{\text{sin.}\theta} \int \frac{\text{sin.}\varrho(1 + r)}{\text{sin.}\varrho(1 - r)} \cdot \frac{\text{cos.}\varrho(1 + r)}{\text{cos.}\varrho(1 - r)} = \frac{\text{sin.}\theta}{\text{sin.}\theta} \int \frac{\text{sin.}2\varrho(1 + r)}{\text{sin.}2\varrho(1 - r)}.$$

Simili modo secundum membrum et penultimum coalescent in $-\frac{\text{sin.}2\theta}{\text{sin.}\theta} \int \frac{\text{sin.}2\varrho(2 + r)}{\text{sin.}2\varrho(2 - r)}$; tum vero etiam membrum tertium cum ante-

antepenultimo dabit $+\frac{\sin.3\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\sin.2\varrho(3+r)}{\sin.2\varrho(3-r)}$. Sicque de ceteris, ita vt hoc modo numerus membrorum ad semissem reducatur.

§. 25. Maneat nunc ν numerus par, sit vero μ numerus impar, eritque coëfficiens vltimi membri $\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}$, quod ergo cum primo coniunctum dabit Casus II. ν par. μ impar.

$$+\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\sin.\varrho(1+r)}{\sin.\varrho(1-r)}\cdot\frac{\cos.\varrho(1-r)}{\cos.\varrho(1+r)}=\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\tang.\varrho(1+r)}{\tang.\varrho(1-r)}.$$

Eodem modo membrum secundum cum penultimo contrahetur in hanc formam: $-\frac{\sin.2\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\tang.\varrho(2+r)}{\tang.\varrho(2-r)}$; at tertium membrum cum antepenultimo coniunctum dabit $\frac{\sin.3\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\tang.\varrho(3+r)}{\tang.\varrho(3-r)}$.

§. 26. Sit nunc ν numerus impar, at μ numerus par, et ob priorem conditionem coëfficiens vltimi termini erit $-\frac{\sin.\mu\pi-\theta}{\sin.\theta}$, qui ob μ numerum parem fiet $+\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}$, ideoque vti in casu secundo, vnde etiam primum membrum cum vltimo iunctum dabit $\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\tang.\varrho(1+r)}{\tang.\varrho(1-r)}$; secundum vero cum penultimo iunctum $-\frac{\sin.2\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\tang.\varrho(2+r)}{\tang.\varrho(2-r)}$; tum vero etiam tertium cum antepenultimo iunctum dat $\frac{\sin.3\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\tang.\varrho(3+r)}{\tang.\varrho(3-r)}$. Casus III. ν impar. μ par.

§. 27. Sint denique ambo numeri μ et ν impares, atque euidens est hunc casum ad primum esse rediturum, ideoque primum et vltimum membrum contrahi in $\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\sin.2\varrho(1+r)}{\sin.2\varrho(1-r)}$, secundum et penultimum in $\frac{\sin.2\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\sin.2\varrho(2+r)}{\sin.2\varrho(2-r)}$, tertium et antepenultimum in $\frac{\sin.3\theta}{\sin.\theta}\,l\frac{\sin.2\varrho(3+r)}{\sin.2\varrho(3-r)}$. Vnde patet hos quatuor casus ad duos reduci posse, prouti ambo numeri μ et ν fuerint vel eiusdem indolis, scilicet ambo vel pares vel impares, vel diuersae indolis: alter par, alter impar. Priore casu eadem contractio locum habebit, quam casu primo dedimus, posteriore vero quam pro secundo dedimus. Casus IV. ν impar. μ impar.

§. 28.

§. 28. Ex his intelligitur, si numerus ν fuerit impar ideoque numerus membrorum primum inuentorum $\nu - 1$ par, tum omnia illa membra contrahi in numerum duplo minorem, scilicet $\frac{\nu-1}{2}$. At vero si ν fuerit numerus par, ob $\nu - 1$ imparem, facta illa contractione remanebit vnum membrum medium respondens valori $i = \frac{\nu}{2}$, pro quo iste reperietur logarithmus:

$$l\frac{\sin.\varrho(\frac{\nu}{2}+r)}{\sin.\varrho(\frac{\nu}{2}-r)} = l\frac{\sin.(\frac{\pi}{4}+\varrho r)}{\sin.(\frac{\pi}{4}-\varrho r)}.$$

Quia igitur est $\sin.(\frac{\pi}{4}-\varrho r) = \cos.(\frac{\pi}{4}+\varrho r)$, euidens est hoc casu haberi $l\,\text{tang.}(\frac{\pi}{4}+\varrho r)$, coëfficiens autem erit $\pm\frac{\sin.\frac{\nu}{2}\theta}{\sin.\theta}$, vbi signum superius valebit si $\frac{\nu}{2}$ fuerit impar, inferius vero si par. Est vero $\sin.\frac{\nu}{2}\theta = \sin.\frac{\mu\pi}{2}$; vnde patet, si fuerit μ numerus par, hoc membrum penitus e medio tolli; sin autem μ fuerit numerus par, tum $\sin.\frac{\mu\pi}{2}$ erit vel $+1$ vel -1. Ista ambiguitas autem iam ante est sublata. His notatis sequentia exempla simpliciora percurramus; vbi notasse iuuabit, numerum μ semper minorem esse debere quam ν, neque tamen sumi posse $\mu = 0$.

§. 29. Quo autem euolutionem casuum specialium faciliorem reddamus, denotet Σ formulam illam integralem, cuius valorem hactenus per partes euoluimus, ita vt sit

$$\Sigma = \frac{\pi}{\sin.\theta}\int\frac{\partial r\,\sin.\theta r}{\sin.\pi r};$$

tum igitur duos casus distingui conueniet, prouti ambo numeri μ et ν fuerint eiusdem vel diuersae indolis.

I. Sint μ et ν eiusdem indolis, eritque

$$\Sigma = \frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}l\frac{\sin.2\varrho(1+r)}{\sin.2\varrho(1-r)} - \frac{\sin.2\theta}{\sin.\theta}l\frac{\sin.2\varrho(2+r)}{\sin.2\varrho(2-r)} + \frac{\sin.3\theta}{\sin.\theta}l\frac{\sin.2\varrho(3+r)}{\sin.2\varrho(3-r)}$$
$$- \frac{\sin.4\theta}{\sin.\theta}l\frac{\sin.2\varrho(4+r)}{\sin.2\varrho(4-r)} \text{ etc.}$$

quas

quas formulas non vltra multitudinem $\frac{\nu-1}{2}$ continuari neceſſe eſt; neque enim hic terminus medius locum habet: ſi enim fuerit ν numerus par, erit etiam μ par, ideoque termini medii coëfficiens euaneſcit.

II. Sint numeri μ et ν diuerſae indolis, vidimusque fore

$$\Sigma = \frac{\sin.\theta}{\sin.\theta} l \frac{\tang.\varrho(1+r)}{\tang.\varrho(1-r)} - \frac{\sin.2\theta}{\sin.\theta} l \frac{\tang.\varrho(2+r)}{\tang.\varrho(2-r)} + \frac{\sin.3\theta}{\sin.\theta} l \frac{\tang.\varrho(3+r)}{\tang.\varrho(3-r)} - \text{etc.}$$

quos terminos non vltra multitudinem $\frac{\nu-1}{2}$ continuari oportet. Hic autem, quoties ν numerus par, ideoque μ impar, occurret terminus medius, qui nunc vltimum locum occupabit, eritque $\pm \frac{1}{\sin.\theta} l \tang.(\frac{\pi}{4} + \varrho r)$, vbi ſignorum ambiguitas ſequitur alternationem ſignorum. Ceterum hic vbique recordandum eſt eſſe $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$ et $\theta = \frac{\mu\pi}{\nu}$.

Exemplum I, quo $\nu = 2$.

§. 30. Hic igitur erit $\varrho = \frac{\pi}{4} = 45°$; at numerus μ neceſſario eſt $= 1$. Quia igitur $\frac{\nu-1}{2} = \frac{1}{2}$, hic ſolus terminus, quem medium vocamus, occurrit, ita vt nunc habeamus

$$\Sigma = l \tang.\tfrac{\pi}{4}(1+r) = l \tang. 45°(1+r),$$

qui valor ſponte ex forma generali deducitur, cum ſit

$$\Sigma = \pi \int \frac{\partial r \sin.\frac{\pi r}{2}}{\sin.\pi r};$$

eſt vero $\sin.\pi r = 2 \sin.\frac{\pi r}{2} \cos.\frac{\pi r}{2}$, vnde fit

$$\Sigma = \tfrac{\pi}{2} \int \frac{\partial r}{\cos.\frac{\pi r}{2}}.$$

Quod ſi iam ponamus $\frac{\pi r}{2} = \Phi$, ob $\frac{\pi \partial r}{2} = \partial\Phi$, erit

$$\Sigma = \int \frac{\partial \Phi}{\cos. \Phi} = l \text{ tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi).$$

Reſtituto ergo pro Φ valore aſſumto erit $\Sigma = l \text{ tang. } 45^\circ (1+r)$, vti inuenimus.

Exemplum II, quo $\nu = 3$.

§. 31. Hic ergo erit $\varrho = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = 1$, integrale noſtrum vnico conſtabit termino. Nunc autem numerus μ duos valores habere poteſt: 1 et 2. Sit primo $\mu = 1$ hincque $\theta = \frac{\pi}{3} = 60$, et quia ambo numeri ſunt impares, ex caſu primo colligimus $\Sigma = l \frac{\sin. 60^\circ (1+r)}{\sin. 60^\circ (1-r)}$. At ſi fuerit $\mu = 2$ ideoque $\theta = 120^\circ$, quia numeri μ et ν habent disparia ſigna, ex caſu ſecundo habebimus $\Sigma = l \frac{\text{tang. } 30^\circ (1+r)}{\text{tang. } 30^\circ (1-r)}$.

Exemplum III, quo $\nu = 4$.

§. 32. Hic ergo erit $\varrho = \frac{\pi}{8} = 22\frac{1}{2}^\circ$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = 1\frac{1}{2}$, integrale vnico tantum membro integro conſtabit, niſi forte terminus medius accedat, quemadmodum ſingulis caſibus pro μ aſſumtis videbimus.

1°. Sit igitur $\mu = 1$, erit $\theta = 45^\circ$ et $2\theta = 90^\circ$. Hinc ergo ob numeros μ et ν diſpares, ex caſu ſecundo habebimus

$$\Sigma = l \frac{\text{tang. } 22\frac{1}{2}^\circ (1+r)}{\text{tang. } 22\frac{1}{2}^\circ (1-r)} - \sqrt{2}. l \text{ tang. } 22\tfrac{1}{2}^\circ (2+r).$$

2°. Sit $\mu = 2$, eritque $\theta = 90^\circ$ et $2\theta = 180^\circ$. Hinc ex caſu primo nanciſcimur $\Sigma = l \frac{\sin. 45^\circ (1+r)}{\sin. 45^\circ (1-r)}$. Cum autem ſit

$$\sin. 45^\circ (1-r) = \cos. 45^\circ (1+r),$$

euidens eſt fore $\Sigma = l \text{ tang. } 45^\circ (1+r)$, qui caſus vtique conuenit cum ratione $\mu : \nu = 1 : 2$.

3°.

3°. At si $\mu = 3$, ideoque $\theta = 135°$ et $2\theta = 270°$, cuius anguli sinus est -1, ob signa disparia habebimus ex casu secundo:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{\text{tang. } 22\frac{1}{2}^\circ (1+r)}{\text{tang. } 22\frac{1}{2}^\circ (1-r)}} + \sqrt{2}.l \text{ tang. } 22\tfrac{1}{2}^\circ (2+r).$$

Exemplum IV, quo $\nu = 5$.

§. 33. Hic ergo erit $\varrho = 18°$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = 2$, integralia ex duobus membris integris constabunt, quia terminus medius, quem quasi dimidium spectamus, hic non occurrit.

1°. Sit $\mu = 1$, eritque $\theta = 36°$ et $2\theta = 72°$; hinc ob ambo signa eadem casus primus nobis dat

$$\Sigma = l\frac{\text{sin. } 36^\circ (1+r)}{\text{sin. } 36^\circ (1-r)} - \frac{\text{sin. } 72^\circ}{\text{sin. } 36^\circ} l\frac{\text{sin. } 36^\circ (2+r)}{\text{sin. } 36^\circ (2-r)}.$$

2°. Sit $\mu = 2$, eritque $\theta = 72°$, ideoque sin. 2θ = sin. $36°$; vnde ob signa disparia casus secundus dat

$$\Sigma = l\frac{\text{tang. } 18^\circ (1+r)}{\text{tang. } 18^\circ (1-r)} - \frac{\text{sin. } 36^\circ}{\text{sin. } 72^\circ} l\frac{\text{tang. } 18^\circ (2+r)}{\text{tang. } 18^\circ (2-r)}.$$

3°. Sit $\mu = 3$, ideoque $\theta = 108°$, siue sin. θ = sin. $72°$ et sin. $2\theta = -$ sin. $36°$; vnde ob signa paria casus primus dat

$$\Sigma = l\frac{\text{sin. } 36^\circ (1+r)}{\text{sin. } 36^\circ (1-r)} + \frac{\text{sin. } 36^\circ}{\text{sin. } 72^\circ} l\frac{\text{sin. } 36^\circ (2+r)}{\text{sin. } 36^\circ (2-r)}.$$

4°. Sit denique $\mu = 4$ et $\theta = 144°$, hincque sin. θ = sin. $36°$ et sin. $2\theta = -$ sin. $72°$; vnde ob signa disparia casus II. praebet

$$\Sigma = l\frac{\text{tang. } 18^\circ (1+r)}{\text{tang. } 18^\circ (1-r)} + \frac{\text{sin. } 72^\circ}{\text{sin. } 36^\circ} l\frac{\text{tang. } 18^\circ (2+r)}{\text{tang. } 18^\circ (2-r)}.$$

Exemplum V, quo $\nu = 6$.

§. 34. Hic igitur est $\varrho = \frac{\pi}{12} = 15°$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = \frac{5}{2}$, integralia duobus membris integris constabunt, quibus accedere potest terminus medius, siue membrum dimidium, quando scilicet μ est numerus impar.

1°. Sit $\mu = 1$, erit $\theta = \frac{1}{6}\pi = 30°$, hinc $\sin.\theta = \frac{1}{2}$, $\sin.2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin.3\theta = +1$; quare ob signa disparia secundus casus nobis suppeditat

$$\Sigma = l\frac{\tan g.15°(1+r)}{\tan g.15°(1-r)} - \sqrt{3}\cdot l\frac{\tan g.15°(1+r)}{\tan g.15°(1-r)} + 2l\tan g.15°(3+r).$$

2°. Sit $\mu = 2$, ideoque $\theta = 60°$, vnde fit $\sin.\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin.2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin.3\theta = 0$; vnde ob signa paria ex casu primo colligimus

$$\Sigma = l\frac{\sin.30°(1+r)}{\sin.30°(1-r)} - l\frac{\sin.30°(2+r)}{\sin.30°(2-r)},$$

quae expressio perfecte aequalis prodiit ei quam supra inuenimus pro casu $\nu = 3$ et $\mu = 1$.

3°. Sit $\mu = 3$, ideoque $\theta = 90$, hinc $\sin.\theta = 1$, $\sin.2\theta = 0$ et $\sin.3\theta = -1$; vnde ob signa disparia casus secundus nobis praebet

$$\Sigma = l\frac{\tan g.15°(1+r)}{\tan g.15°(1-r)} + * - l\tan g.15°(3+r), \text{ siue}$$

$$\Sigma = l\frac{\tan g.15°(1+r)}{\tan g.15°(1-r)\tan g.15°(3+r)},$$

quae expressio aequalis esse debet ei, quae in primo exemplo prodiit, quia vtroque casu est $\mu : \nu = 1 : 2$.

4°. Sit $\mu = 4$, ideoque $\theta = 120°$, hinc $\sin.\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin.2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin.3\theta = 0$; vnde ob signa paria casus primus praebet

$$\Sigma = l\frac{\sin.30°(1+r)}{\sin.30°(1-r)} + l\frac{\sin.30°(2+r)}{\sin.30°(2-r)},$$

quae conuenire debet cum superiore pro casu quo $\mu : \nu = 2 : 3$.

5°. Sit $\mu = 5$, ideoque $\theta = 150°$, ergo $\sin.\theta = \frac{1}{2}$, $\sin.2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin.3\theta = 1$; vnde ob signa disparia secundus casus nobis dat

$\Sigma =$

$$\Sigma = l\frac{\text{tang.}15^\circ(1+r)}{\text{tang.}15^\circ(1-r)} + \sqrt{3}\cdot l\frac{\text{tang.}15^\circ(2+r)}{\text{tang.}15^\circ(2-r)} + 2l\,\text{tang.}\,15^\circ(3+r).$$

Exemplum VI, quo $\nu = \infty$.

§. 35. Quia igitur fractio $\frac{\mu}{\nu}$ vt euaneſcens ſpectatur, ponamus $\mu = 1$, ſicque angulus θr prae πr euaneſcet; vnde cum loco ſinuum angulorum θ et θr ipſos angulos ponere liceat, erit noſter valor $\Sigma = \frac{\pi \int r\,\partial r}{\int n.\pi r}$. Deinde quia etiam angulus $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$ in nihilum abit, loco omnium ſinuum, in expreſſione pro Σ inuenta occurrentium, ipſos angulos ſcribere licebit, quo obſeruato valor quantitatis Σ ſequenti modo exprimetur:

$$l\frac{1+r}{1-r} - 2l\frac{2+r}{2-r} + 3l\frac{3+r}{3-r} - 4l\frac{4+r}{4-r} + \text{etc.}$$

§. 36. Singuli hi logarithmi commode in ſeries reſolui poſſunt. Cum enim forma generalis omnium terminorum ſit $il\frac{i+r}{i-1}$, tum vero per notam reſolutionem ſit

$$l\frac{i+r}{i-1} = \frac{2r}{i} + \frac{2r^3}{3i^3} + \frac{2r^5}{5i^5} + \frac{2r^7}{7i^7} + \text{etc.}$$

erit totum membrum

$$= 2r\left(1 + \frac{rr}{3ii} + \frac{r^4}{5i^4} + \frac{r^6}{7i^6} + \text{etc.}\right)$$

quamobrem ſingulis partibus hoc modo euolutis fiet

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma}{2r} = {} & +1 + \frac{rr}{3} + \frac{r^4}{5} + \frac{r^6}{7} + \frac{r^8}{9} + \text{etc.} \\
& -1 - \frac{rr}{3.4} - \frac{r^4}{5.4^2} - \frac{r^6}{7.4^3} - \frac{r^8}{9.4^4} - \text{etc.} \\
& +1 + \frac{rr}{3.9} + \frac{r^4}{5.9^2} + \frac{r^6}{7.9^3} + \frac{r^8}{9.9^4} + \text{etc.} \\
& -1 - \frac{rr}{3.16} - \frac{r^4}{5.16^2} - \frac{r^6}{7.16^3} - \frac{r^8}{9.16^4} - \text{etc.} \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 37. Quod ſi iam iſtas ſeries ſecundum columnas verticales diſponamus, quia prima columna dat

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2},$$

prodibit haec expreſſio:

$$\tfrac{\Sigma}{2r} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} rr \left(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5} r^4 \left(1 - \tfrac{1}{4^2} - \tfrac{1}{9^2} - \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{7} r^6 \left(1 - \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} - \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Quoniam igitur harum ſerierum omnium ſummae ſunt cognitae, hinc per approximationem eo facilius valor litterae Σ definiri poterit, quia littera r ſemper denotat fractionem vnitate maiorem.

§. 38. Quod ſi ergo in ſubſidium vocemus ea quae olim circa ſummas harum poteſtatum erueram, atque iisdem denominationibus vtamur, ponendo:

$$\mathrm{A}\,\pi^2 = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}$$
$$\mathrm{B}\,\pi^4 = 1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} + \text{etc.}$$
$$\mathrm{C}\,\pi^6 = 1 + \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

quoniam hinc facile ſummae deriuantur, quando terminorum ſigna alternantur, habebitur:

$$\tfrac{\Sigma}{2r} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{A}\,\pi\pi rr + \tfrac{1}{5}\left(1 - \tfrac{1}{8}\right)\mathrm{B}\,\pi^4 r^4$$
$$+ \tfrac{1}{7}\left(1 - \tfrac{1}{32}\right)\mathrm{C}\,\pi^6 r^6 + \text{etc.}$$

Vbi meminiſſe conuenit eſſe

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{6},\ \mathrm{B} = \tfrac{1}{90},\ \mathrm{C} = \tfrac{1}{945},\ \mathrm{D} = \tfrac{1}{9450},\ \mathrm{E} = \tfrac{1}{93555},\ \text{etc.}$$

Horum autem valorum ratio iam ſaepius abunde eſt expoſita.

SPECI-

SPECIMEN SINGVLARE ANALYSEOS INFINITORVM INDETERMINATAE.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

§. 1.

Iam ante complures annos nouum prorſus Calculi genus adumbraui, cui *Analyſeos Infinitorum indeterminatae* nomen inpoſueram, quoniam ad Analyſin Infinitorum ordinariam eodem modo refertur, quo Analyſis Diophantea ad Algebram communem. Indoles ſcilicet huius Calculi in eo conſiſtit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles inueſtigetur, vnde vna pluresue formulae integrales nanciſcantur valores ſiue algebraicos, ſiue datas quadraturas inuoluentes. Veluti ſi talis definiri debeat relatio inter binas variabiles x et y, vt iſta formula integralis: $\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, algebraicum valorem adipiſcatur, vel etiam datas quantitates tranſcendentes inuoluat. Hinc enim euidens eſt curuas algebraicas obtineri, quae ſint vel rectificabiles, vel quarum rectificatio a datis quadraturis pendeat; atque hinc problema illud *Hermannianum* celeberrimum methodo directa ſolutum dedi, quo requirebantur curuae algebraicae non rectificabiles, ſed quarum rectificatio datas quadraturas inuolveret, in quibus tamen nihilominus vel vnus, vel duo, vel adeo quotquis voluerit arcus aſſignari poſſent abſolute rectificabiles,

biles, poſtquam ipſe *Hermannus* et *Bernoullii* methodo maxime indirecta ad eius ſolutionem peruenissent. Praeterea vero etiam tum temporis plura alia huius generis Problemata non parum curioſa ope methodi, quam ibi expoſui, felici ſucceſſu expediui.

§. 2. Methodus autem mea huiusmodi Problemata ſolvendi ita eſt comparata, vt eius beneficio ſequens Problema generale pertractari poſſit:

Si P, Q, R, S, *etc. fuerint functiones quaecunque datae variabilis* x, *ſemper eiusmodi relatio algebraica inter binas variabiles* x *et* y *aſſignari poteſt, vt omnes iſtae formulae integrales:* $\int P\partial y$, $\int Q\partial y$, $\int R\partial y$, *etc. quotcunque fuerint, algebraicos ſortiantur valores. Quin etiam effici poteſt vt vna earum, vel etiam duae, datas quadraturas inuoluant.*

Quamuis autem iſte caſus latiſſime patere videatur, tamen hac conditione maxime reſtringitur, quod in iſtis formulis altera variabilis y vnicam tantum obtineat dimenſionem. Si enim diverſae dimenſiones occurrerent, neutiquam adhuc perſpicere poſſum, quomodo reſolutio ſuſcipi deberet.

§. 3. Quoties igitur eiusmodi quaeſtiones proponuntur, quas ad huiusmodi formulas reuocare non licet, fateri cogor, me nullo adhuc modo perſpicere poſſe, quibusnam artificiis ſolutionem ſaltem tentari conueniat, id quod exemplo ſimpliciſſimo declaraſſe ſufficiet. Veluti ſi hae duae formulae: $\int\frac{y\partial x}{x}$ et $\int\frac{\partial x}{yx}$, ambae reddi debeant integrabiles, aliam ſolutionem exhiberi poſſe non video, niſi quae ſponte ſe offert, dum pro y poteſtas quaecunque ipſius x aſſumitur. Vix autem aſſeuerare auſim, nullam aliam ſolutionem locum habere poſſe. Ex quo intelligere licet, quantopere adhuc iſtud nouum calcul

culi genus nobis sit absconditum, et omnia quae adhuc sunt praestita vix tanquam prima eius elementa spectari posse; vnde maxime esset optandum, vt sagaciſſima ingenia omnes vires intenderent ad istam Analyseos partem vberius excolendam.

§. 4. Ad hoc etiam Calculi genus referri debent bina illa Theoremata, quae non ita pridem in medium afferre sum ausus, quorum priore asseueraui, praeter circulum nullam aliam dari curuam algebraicam, cuius singuli arcus per arcus circulares exhiberi queant, siue nullam aliam inter x et y relationem algebraicam assignari posse, vt fieret

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - zz)}}.$$

Altero autem Theoremate affirmaui, nullam plane dari curvam algebraicam, cuius singuli arcus per simplices logarithmos exprimi queant, siue vt fieri possit $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{z}$. Pluribus quidem rationibus veritatem horum Theorematum corroborare sum annisus, ita vt nullum amplius dubium supereſſe posse videatur; interim tamen plenam eius demonstrationem vix ante exspectare licebit, quam nouum hoc Calculi genus vberius fuerit elaboratum.

§. 5. Imprimis autem ad istum Calculum pertinent quaestiones iam passim tractatae de lineis rectificabilibus in data superficie siue conuexa siue concaua ducendis, quarum solutio semper multo maiorem huius noui calculi perfectionem requirere videtur. Postquam enim multum desudassem, vt in superficie sphaerica lineam rectificabilem inuestigarem, nullam aliam reperire potui, praeter eam, quae Geometris iam pridem innotuit, quae scilicet describitur, dum circulus sphaerae maximus super minore prouoluitur, et cuius inuentio casui potius fortuito quam certae methodo accepta est referenda; vnde vix

dubitauerim aſſeuerare, praeter iſtam curuam in ſuperficie ſphaerica nullam aliam dari, quae eſſet rectificabilis. Quin etiam in ſuperficiebus cylindricis et conicis nullae aliae lineae rectificabiles mihi quidem exhibere poſſe videntur, praeter eas quae ipſae ſunt rectae.

§. 6. Nuper vero ſe mihi alia huius generis quaeſtio obtulit, cuius quidem ſolutio iam aliunde mihi erat cognita; interim tamen eam ita comparatam deprehendi, vt nullam plane viam directam, ad eius ſolutionem pertingendi, perſpicere potuerim, niſi ipſa ſolutio iam aliunde innotuiſſet. Hinc ſcilicet methodum maxime obliquam et indirectam deriuaui, quae demum per plures ambages ad ſcopum perduxerat; quamobrem plurimum lucis in hoc obſcuro calculi genere affulgere poſſe confido, ſi problema iſtud cum mea ſolutione, quantumuis obliqua, Geometris propoſuero.

Problema.

Inueſtigare relationem inter binas quantitates variabiles q *et* z, *vt primo haec formula:* ∫ q d z, *fiat algebraica, tum vero iſta:* $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ *arcum circularem exprimat.*

Solutio.

§. 7. Hic manifeſto ſumma difficultas in poſteriori formula deprehenditur, quam ad arcum circularem reuocari oportet; vbi quidem in tranſitu notari meretur, ſi iſta formula etiam algebraica reddi deberet, vti prior, ne vllam plane viam me perſpicere poſſe hoc negotium conficiendi. Ex quo conditio, quod iſta formula ad arcum circularem reduci debeat, multo difficilior videbatur; interim tamen haec ipſa conditio viam nobis apperiet ad ſcopum propoſitum perueniendi, id quod ex ſequentibus operationibus patebit.

§. 8.

§. 8. Primo igitur formulam $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ arcui circuli, cuius tangens sit $\frac{x}{y}$, aequalem statuamus, vbi data opera duas nouas variabiles x et y in calculum introducimus, quo deinceps ambae nostrae propositae q et z per eas commodius exprimi queant. Sumtis igitur differentialibus consequemur hanc aequationem: $\frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = \frac{y\partial x - x\partial y}{xx+yy}$, et nunc faciamus $zz = xx+yy$, id quod vtique sine vlla quaestionis restrictione fieri licet, propterea quod ambae litterae x et y prorsus a nostro arbitrio pendent. Posito autem $zz = xx+yy$, supereſt vt fiat $z\partial z\sqrt{(qq-1)} = y\partial x - x\partial y$, vnde cum sit $z\partial z = x\partial x + y\partial y$ deducimur ad hanc determinationem:

$$\sqrt{(qq-1)} = \frac{y\partial x - x\partial y}{x\partial x + y\partial y}.$$

§. 9. Vt iam hanc formulam a differentialibus liberemus, statuamus $\partial y = p\partial x$, vbi manifestum est formulam integralem $\int p\partial x$ absolute integrabilem seu algebraicam reddi debere. Hinc igitur habebimus $\sqrt{(qq-1)} = \frac{y-px}{x+py}$, vbi commode vsu venit vt sumtis quadratis fiat $qq = \frac{(1+pp)(xx+yy)}{(x+py)^2}$; quare ob $xx+yy = zz$, erit radice extracta $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, ita vt nunc ambae variabiles q et z propositae satis concinne per binas nouas variabiles x et y expressae prodierint, atque posteriori conditioni, qua formula $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ arcum circuli exprimere debet, iam perfecte sit satisfactum, idque tam generaliter, vt nulla limitatio sit introducta, quandoquidem in calculo adhuc duae variabiles x et y remanserunt, nullo modo a se inuicem pendentes.

§. 10. Quoniam igitur posteriori conditioni problematis est satisfactum, nihil aliud supereſt, nisi vt prior conditio, qua formula $\int q\partial z$ ad quantitatem algebraicam est reuocanda adimpleatur. Quod si vero loco q valorem inuentum substi-

tuamus, reperiemus: $q\,\partial z = \frac{z\,\partial z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$; quare cum sit

$$z\,\partial z = x\,\partial x + y\,\partial y = \partial x\,(x+py),$$

quasi praeter exspectationem deducimur ad istam formulam simpliciss mam: $q\,\partial z = \partial x\sqrt{(1+pp)}$, quandoquidem hinc denominator quasi casu fortuito est sublatus, ex quo tota quaestio huc est reducta, vt ista formula integralis $\int \partial x\sqrt{(1+pp)}$ ad quantitatem algebraicam reuocetur, simul vero etiam, vti iam ante obseruauimus, haec formula $\int p\,\partial x$ euadat algebraica, quibus duabus conditionibus cum fuerit satisfactum, problema nostrum in omni extensione simul erit resolutum, tum enim primo habebimus $y = \int p\,\partial x$, hincque porro

$$z = \sqrt{(xx+yy)} \text{ et } q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}.$$

His autem valoribus ambae conditiones praescriptae ita adimplentur, vt sit $\int q\,\partial z = \int \partial x\sqrt{(1+pp)}$, quae per hypothesin est quantitas algebraica; pro altera autem conditione fit

$$\int \frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.}\,\frac{x}{y},$$

ideoque arcui circuli aequalis, vti requirebatur.

§. 11. Quaeri igitur debet eiusmodi ralatio inter binas variabiles p et x, vt ambae istae formulae $\int p\,\partial x$ et $\int \partial x\sqrt{(1+pp)}$ euadant algebraicae. Cum igitur sit

$$\int p\,\partial x = px - \int x\,\partial p \text{ et}$$
$$\int \partial x\sqrt{(1+pp)} = x\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

quoniam hae duae nouae formulae in supra §. 2. memoratis continentur, per methodum olim expositam statuamus primo $\int x\,\partial p = t$, vt sit $x = \frac{\partial t}{\partial p}$, atque altera formula abibit in hanc: $\int \frac{p\,\partial t}{\sqrt{(1+pp)}}$, quae si statuatur $= u$, hinc fiet $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\partial u}{\partial t}$; vbi iam pro u functionem quamcunque algebraicam ipsius t assumere

mere licet. Quare si ponamus $\partial u = v\,\partial t$, erit $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = v$, hincque $p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}}$.

§. 12. Tota ergo nostra solutio ita se habebit. Sumta functione quacunque variabilis t, quae vocetur $= u$, vnde fiat $\partial u = v\,\partial t$, ita vt etiam v sit functio ipsius t, hinc primo erit

$$p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quo valore inuento capiatur $x = \frac{\partial t}{\partial p}$, ita vt iam p et x per solam variabilem t sint expressae. Tum vero erit

$$\int p\,\partial x = \frac{v\,\partial t}{\partial p\sqrt{(1-vv)}} - t = y.$$

Deinde simili modo erit

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \frac{\partial t}{\partial p\sqrt{(1-vv)}} - u = \int q\,\partial z.$$

Denique ex his ipsae quantitates in problemate quaesitae ita per nouam variabilem t exprimentur, vt sit $z = \sqrt{(xx+yy)}$, et hinc $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, atque ex his valoribus problemati ita satisfiet, vt sit

$$\int q\,\partial z = \frac{x}{\sqrt{(1-vv)}} - u \text{ et } \int \frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.}\,\frac{x}{y}.$$

§. 13. Quo haec clarius intelligantur, exemplum euolvamus, sumendo $u = at^n$, vnde fit

$$v = nat^{n-1} \text{ et } \sqrt{(1-vv)} = \sqrt{(1-nnaat^{2n-2})},$$

vnde colligitur

$$p = \frac{nat^{n-1}}{\sqrt{(1-nnaat^{2n-2})}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-nnaat^{2n-2})}}.$$

Cum igitur hinc sit

$$\partial p = \frac{n(n-1)at^{n-2}\,\partial t}{(1-nnaat^{2n-2})^{\frac{3}{2}}}, \text{ erit}$$

$$x = \frac{(1 - nnaat^{2n-1})^{\frac{3}{2}}}{n(n-1)at^{n-2}} \text{ et}$$

$$y = \frac{t(2 - n - nnaat^{2n-2})}{n-1}.$$

Quoniam vero hae formulae iam nimis fiunt intricatae, ſumamus $a = 1$ et $n = 2$, vt ſit $u = tt$ et $v = 2t$, ex quibus porro colliguntur valores

$$p = \frac{2t}{\sqrt{(1-4tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-4tt)}},$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1-4tt)^{\frac{3}{2}},\ y = -4t^3, \text{ hincque}$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4} - 3tt + 12t^4)}, \text{ ac denique}$$

$$q = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} - 3tt + 12t^4)}}{\frac{1}{2} - 4tt}.$$

Problemati autem iam ita ſatisfiet, vt ſit

$$\int q\,\partial z = \tfrac{1}{2} - 3tt \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.} - \frac{(1-4tt)^{\frac{3}{2}}}{8t^3}.$$

Alia Solutio.

per formulas rationales procedens.

§. 14. Vt formulas radicales euitemus, ponamus ſtatim $p = \frac{rr-1}{2r}$, vt fiat $\sqrt{(1+pp)} = \frac{rr+1}{2r}$. Nunc igitur has duas formulas:

$$\int p\,\partial x = \int \frac{(rr-1)\partial x}{2r} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \int \frac{(rr+1)\partial x}{2r},$$

integrabiles reddi oportet, id quod praeſtabitur faciendo has duas

duas formulas: $\int r\,\partial x$ et $\int \frac{\partial x}{r}$ integrabiles; tum enim fiet

$$\int p\,\partial x = \tfrac{1}{2}\int r\,\partial x - \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{r} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \tfrac{1}{2}\int r\,\partial x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{r}.$$

Sicque quaeritur eiusmodi relatio inter r et x, vt tantum hae duae formulae euadant integrabiles.

§. 15. Hic igitur reductione ſupra adhibita vtamur, et cum ſit

$$\int r\,\partial x = rx - \int x\,\partial r \text{ et } \int \frac{\partial x}{r} = \frac{x}{r} + \int \frac{x\,\partial r}{rr},$$

ponamus $\int x\,\partial r = t$, vt fiat $x = \frac{\partial t}{\partial r}$; tum vero altera formula erit $\int \frac{x\,\partial r}{rr} = \int \frac{\partial t}{rr}$, cuius valorem ſi vellemus ſtatuere $= u$, quantitas r ſignum radicale inuolueret, quod vt euitemus, vtamur eadem reductione: $\int \frac{\partial t}{rr} = \frac{t}{rr} + 2\int \frac{t\,\partial r}{r^3}$, ac iam ſtatuamus $\int \frac{t\,\partial r}{r^3} = s$, fietque $t = \frac{r^3\,\partial s}{\partial r}$. Hic iam pro s functionem quamcunque ipſius r accipere licebit, vnde fiat $\partial s = s'\,\partial r$, ſicque habebimus $t = r^3 s'$, hincque regrediendo

$$\int \frac{\partial t}{rr} = \int \frac{x\,\partial r}{rr} = r s' + 2s,$$

tum vero, poſito $\partial s' = s''\,\partial r$, erit $x = 3rrs' + r^3 s''$.

§. 16. His valoribus inuentis, cum ſit

$$\int r\,\partial x = 2r^3 s' + r^4 s'' \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial x}{r} = 2s + 4rs' + rrs'',$$

ex his duobus valoribus colligimus ſequentes:

$$\int p\,\partial x = -s + (r^3 - 2r)s' + \tfrac{1}{2}(r^4 - rr)s'',$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = s + (r^3 + 2r)s' + \tfrac{1}{2}(r^4 + rr)s'',$$

ex quibus porro deducuntur reliqui: $\int p\,\partial x$, $z = \sqrt{(xx+yy)}$, $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, hocque pacto tota ſolutio formulis rationalibus abſoluetur.

§. 17.

§. 17. Ceterum non dubito, quin contemplatio huius Problematis et Solutionis vtcunque obliquae, quae casu tantum succesſiſſe videatur, Geometris occasionem ſuppeditare queat, hoc nouum Calculi genus, cuius vix prima elementa nobis etiamnunc ſunt cognita, vlterius rimandi atque ad maiorem perfectionis gradum euehendi, quandoquidem hinc maxima incrementa ad vniuerſam Analyſin redundare ſunt exiſtimanda.

DE

DE
LINEIS RECTIFICABILIBVS
IN SVPERFICIE SPHAEROIDICA QVACVNQVE GEOMETRICE DVCENDIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4. *Iul.* 1776.

§. 1.

Maxime ardua eſt quaeſtio, quando in ſuperficie corporis cuiuscunque eiusmodi lineae geometrice ducendae requiruntur, quarum omnes arcus algebraice aſſignare liceat; cum adeo in cylindris, etſi pro genere ſimpliciſſimo huiusmodi corporum ſint habendi, praeter lineas rectas axi parallelas nullae aliae curuae rectificabiles duci queant. Hinc equidem etiam ſum arbitratus, in ſuperficiebus conicis quoque nullas alias tales lineas, niſi quae ipſae ſint rectae, duci poſſe, id quod quidem in genere affirmandum videtur; veruntamen deinceps deprehendi, in iis conis rectis, quorum latera ad baſis diametrum rationem teneant rationalem, infinitas plane lineas rectificabiles geometrice duci poſſe, quemadmodum alia occaſione ſum oſtenſurus. In ſuperficie autem ſphaerica nullae adhuc aliae huiusmodi lineae rectificabiles inueniri potuerunt, praeter Epicycloïdes illas ſatis notas, quae prouolutione circuli maximi ſuper minore naſcuntur,

quae quidem inueſtigatio per nullam certam methodum, ſed potius caſu quodam fortuito peracta videtur.

§. 2. Multo minus igitur ſperare licuit, vnquam fore, vt in ſuperficie corporis ſphaeroidici eiusmodi lineae rectificabiles detegerentur; quandoquidem arcus elliptici talem inueſtigationem penitus impedire videbantur. Incidi autem nuper in inſigne quodpiam Theorema, quod tanquam fundamentum talium inueſtigationum merito ſpectari poteſt, vnde non ſolum pro ſuperficiebus ſphaericis methodo ſatis plana et facili curvas illas rectificabiles elicere potui, ſed quod me etiam ad tales curuas in ſuperficie ſphaeroidica quacunque manuduxit. Hoc igitur Theorema ante omnia iſti inueſtigationi praemittere neceſſe eſt.

Theorema generale.

§. 3. *Si littera v denotet functionem quamcunque anguli* Φ, *atque elementum curuae ita exprimatur vt ſit* $\partial s = v\partial\Phi + \partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}$, *tum coordinatae orthogonales huius curuae, quae ſint x et y, ſemper ita abſolute exprimi poſſunt, vt ſit*

$$x = \int \partial s \text{ ſin. } \Phi = \tfrac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ ſin. } \Phi - v \text{ coſ. } \Phi \text{ et}$$

$$y = \int \partial s \text{ coſ. } \Phi = \tfrac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ coſ. } \Phi + v \text{ ſin. } \Phi.$$

Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 1. §. 4. Sit A Y linea illa curua ad axem A N relata, ad quam in quouis puncto Y ducatur normalis Y N, in qua producta notetur punctum O, centrum circuli curuam in Y y oſculantis. Tum vero vocetur angulus A N Y $= \Phi$, ac demiſſo ex Y ad axem perpendiculo Y X, ſint coordinatae A X $= x$ et X Y $= y$, ipſe vero arcus A Y vocetur $= s$. Iam quia eius ele-

elementum eſt $Yy = \partial s = v\,\partial\Phi + \partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}$, per hypotheſin, ob angulum $AYX = \Phi$, erit vtique $\partial x = \partial s$ ſin. Φ et $\partial y = \partial s$ coſ. Φ, ideoque

$$\partial x = v\,\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi + \text{ ſin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$
$$\partial y = v\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi + \text{ coſ. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$

quamobrem habebitur integrando

$$x = \int v\,\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi + \int \text{ ſin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$
$$y = \int v\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi + \int \text{ coſ. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}.$$

§. 5. Ad iſtas formulas integrales euoluendas per reductiones notiſſimas elicimus

$$\int v\,\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi = -v \text{ coſ. } \Phi + \int \partial v \text{ coſ. } \Phi \text{ et}$$
$$\int \text{ ſin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ ſin. } \Phi - \int \partial v \text{ coſ. } \Phi,$$

quibus coniunctis manifeſto prodit $x = -v$ coſ. $\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ ſin. Φ. Simili modo pro applicata y reperietur

$$\int v\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi = v \text{ ſin. } \Phi - \int \partial v \text{ ſin. } \Phi \text{ et}$$
$$\int \text{ coſ. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ coſ. } \Phi + \int \partial v \text{ ſin. } \Phi;$$

vnde conficitur $y = v$ ſin. $\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ coſ. Φ.

Corollarium 1.

§. 6. Quodſi ergo v fuerit functio algebraica, non quidem ipſius anguli Φ, ſed potius eius ſinus vel tangentis, ita vt poſita tang. $\Phi = t$ quantitas v ſit functio quaecunque algebraica ipſius t; euidens eſt, ipſam curuam futuram eſſe algebraicam, propterea quod ambae eius coordinatae x et y per functiones algebraicas ipſius t exprimuntur. Longitudo autem huius curuae, cum ſit $s = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$, adeo erit rectificabilis, quoties formulam $\int v\,\partial\Phi$, ſiue $\int \frac{v\,\partial t}{1+tt}$, integrare licet. Contra vero

haec rectificatio ab eiusmodi quadratura pendebit, quam formula integralis $\int v \partial\Phi$ inuoluet; vnde ope huius theorematis facile erit, non solum innumerabiles curuas algebraicas assignare, quae sint rectificabiles, sed etiam tales, quarum rectificatio datam quadraturam inuoluat.

Corollarium 2.

§. 7. Quoniam ducta normali proxima y O, priori in centro circuli osculantis O occurrente, ob angulum $A\,n\,y = \Phi + \partial\Phi$, erit angulus $Y\,O\,y = \partial\Phi$, ideoque ipse radius osculi $Y\,O = \frac{\partial s}{\partial\Phi}$. Hinc ergo sumto elemento $\partial\Phi$, pro differentialibus secundis, constante, erit ipse radius osculi $Y\,O = v + \frac{\partial\partial v}{\partial\Phi^2}$.

Corollarium 3.

§. 8. Quoniam inuenimus applicatam

$$X\,Y = y = v \text{ sin. } \Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cos. } \Phi,$$

ob angulum $X\,N\,Y = \Phi$ erit ipsa normalis

$$Y\,N = \frac{v}{\text{sin. } \Phi} = v + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cot. } \Phi$$

et subnormalis

$$X\,N = v \text{ cos. } \Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \cdot \frac{\text{cos. } \Phi^2}{\text{sin. } \Phi},$$

vnde erit interuallum $A\,N = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \cdot \frac{1}{\text{sin. } \Phi}$. Quare si ex A in normalem $Y\,N$ ducatur perpendiculum $A\,P$, habebimus $A\,P = A\,N \text{ sin. } \Phi = \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ et interuallum $N\,P = A\,N \text{ cos. } \Phi = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cot. } \Phi$. Hinc cum esset $Y\,N = v + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cot. } \Phi$, colligitur fore $P\,Y = v$; sicque functio nostra v exprimit perpendiculum ex puncto A in tangentem $Y\,T$ demissum.

Corollarium 4.

§. 9. Hinc igitur discimus, quoties hoc perpendiculum $A\,T$ fuerit functio algebraica anguli $A\,N\,Y = \Phi$, seu potius

tius eius tangentis $= t$, toties ipsam curuam fore algebraicam; quoniam inde ambas coordinatas $AP = x$ et $PN = y$ algebraice exprimere licet. Vbi meminisse iuuabit angulum Φ tanquam mensuram amplitudinis curuae spectari posse.

Corollarium 5.

§. 10. Si praeterea ducamus chordam AY, quia in triangulo rectangulo APY habemus cathetos $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$ et $PY = v$, longitudo ipsius chordae ita concinne exprimitur, vt sit $AY = \sqrt{(vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2})}$, vnde simul deducitur tang. $AYP = \frac{\partial v}{v \partial \Phi}$, quae ergo simul erit cotangens anguli AYT, quem chorda cum tangente constituit, ita vt huius anguli tangens sit $= \frac{v \partial \Phi}{\partial v}$, dum ipsa tangens YT aequatur rectae $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$.

Scholion 1.

§. 11. Ceterum si perpendiculum, ex quopiam puncto fixo A in tangentem curuae demissum, fuerit functio algebraica amplitudinis curuae $= \Phi$, seu potius eius tangentis $= t$, facile perspicitur, si loco A aliud quoduis punctum a accipiatur, perpendiculum inde in tangentem demissum at pariter fore functionem algebraicam ipsius Φ, seu t. Vnde in genere patet, quoties perpendicula, ex puncto quocunque fixo in tangentes curuae demissa, fuerint functiones algebraicae ipsius Φ vel t, toties curuam semper fore algebraicam, quod est theorema fine dubio maximi momenti in theoria linearum curuarum.

Scholion 2.

§. 12. Quae hactenus analytice sunt demonstrata, per solas considerationes geometricas sequenti modo ostendi possunt. Sumatur punctum quodcunque fixum A, vnde recta AN posi- Tab. I. Fig. 2.

tione data cum radio oſculi curuae Y O conſtituat angulum A N Y $= \Phi$; tum vero ex A in ipſum radium oſculi ducatur perpendiculum A P, poſitoque interuallo Y P $= v$, ſi ex A ſimili modo in radium oſculi proximum y O ducatur perpendiculum A p, erit vtique interuallum $y p = v + \partial v =$ Y q, propterea quod ambo radii oſculi ad curuam ſunt normales; quare cum, ob angulum A $n y = \Phi + \partial \Phi$, ſit angulus ad O $= \partial \Phi$, erit etiam angulus P A $q = \partial \Phi$, vnde cum P $q = \partial v$, euidens eſt fore perpendiculum A P $= \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, ex quo erit A $p = \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi}$, ideoque elementum $p q = \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi}$, vnde ob angulum ad O $= \partial \Phi$ ſtatim deducitur interuallum O q ſiue O P $= \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi^2}$, ſicque perſpicuum eſt ipſum radium oſculi fore $v + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi^2}$. Porro vero quia inuenimus perpendiculum AP $= \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, ob angulum A N P $= \Phi$ erit ipſum interuallum A N $= \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cdot \frac{1}{\sin. \Phi}$ et interuallum P N $= \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot. \Phi$, ita vt iam futura ſit tota normalis

$$Y N = Y P + P N = v + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot. \Phi.$$

Demittamus iam ex Y ad A N perpendiculum Y X, vt obtineamus coordinatas A X $= x$ et X Y $= y$, et quoniam in triangulo rectangulo X Y N habemus hypothenuſam Y N $= v + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot. \Phi$, cum angulo X N Y $= \Phi$, inde ſtatim cognoſcimus ipſam applicatam

$$X Y = y = v \sin. \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cos. \Phi$$

et ſubnormalem

$$X N = v \cos. \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cdot \frac{\cos. \Phi^2}{\sin. \Phi},$$

qua a toto interuallo A N ablata relinquitur abſciſſa

$$A X = x = - v \cos. \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \sin. \Phi,$$

quas ergo coordinatas, ſine vlla integratione, algebraice expreſſas elicuimus, prorſus vt ante. His igitur praemiſſis inſtitutum noſtrum aggrediamur.

Pro-

Problema.

§. 13. *Si quadrans ellipticus A C B circa axem C B circumuoluatur, ſicque ſphaeroides ellipticum formetur, cuius aequator erit circulus radio C A deſcriptus, ſemiaxis vero C B, in ſuperficie huius ſphaeroidis eiusmodi lineam curuam geometrice deſcribere, quae ſimul ſit rectificabilis.* Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 14. Vocemus radium aequatoris $CA = 1$, at ſemiaxem ſphaeroidis $CB = c$, ac referat in Figura 4. circulus centro C radio $CA = 1$ deſcriptus aequatorem ſphaeroidis propoſiti, ad quem ex quouis ſuperficiei puncto Z demittatur perpendiculum Z Y, atque ex Y ad radium aequatoris C A perpendiculum Y X, vt locum puncti Z per ternas coordinatas orthogonales determinemus, quae ſint $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, quibus conſtitutis, ſi noſtrum ſphaeroides eſſet ſphaera radio $= 1$ deſcripta, ob interuallum $CZ = 1$ haberetur haec aequatio: $xx+yy+zz=1$, ideoque $z=\sqrt{(1-xx-yy)}$. Nunc igitur, quia ſemiaxis ſphaeroidis eſt $= c$, iſta altitudo Y Z in ratione $= 1 : c$ augeri debet, ita vt pro hac ſuperficie ſphaeroidica habeamus iſtam aequationem: $z=c\sqrt{(1-xx-yy)}$, quae eſt aequatio naturam huius ſphaeroidis exprimens. Fig. 4.

§. 15. Conſtat autem in genere, quando in ſuperficie corporis cuiuscunque ducatur linea curua quaecunque, eius elementum ∂s ſemper ita exprimi, vt ſit $\partial s=\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)}$. Quamobrem noſtra quaeſtio huc reducitur, vt eiusmodi relatio inter binas coordinatas x et y aſſignetur, vnde formula illa differentialis pro ∂s data euadat integrabilis; tum autem aequatio inter x et y huic conditioni ſatisfaciens ſimul exhibebit proiectionem curuae illius rectificabilis in plano aequatoris factam, ita

ita vt viciſſim ex cognita hac proiectione ipſa curua quaeſita in ſuperficie ſphaeroidis facile exploretur.

§. 16. Quisquis autem hunc laborem in genere ſuſcipere voluerit, mox deprehendet, nullum ſucceſſum exſpectari poſſe, niſi inueſtigationem ad caſum particularem adſtrinxerit, quo ratio conſtans inter longitudinem curuae quaeſitae s et altitudinem z ſtatuatur. Hanc ob rem ſtatim ponamus eſſe $s = nz$, ita vt ſumtis differentialibus eſſe debeat

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = nn\,\partial z^2, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial z \sqrt{(nn - 1)};$$

vnde perſpicitur, numerum n neceſſario vnitate maiorem eſſe debere.

§. 17. Cum igitur formula $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ exprimat elementum proiectionis in plano aequatoris factae, patet etiam hanc proiectionem eſſe debere curuam rectificabilem. Si enim eius longitudo ponatur $= \Sigma$, ob $\partial\Sigma = \partial z \sqrt{(nn - 1)}$ ſequitur fore $\Sigma = z\sqrt{(nn-1)} + C$; quamobrem ſi amplitudo iſtius arcus Σ ponatur $= \Phi$, per theorema praecedens, ſi v denotet functionem quamcunque algebraicam ipſius Φ, erit $\Sigma = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$, vbi manifeſtum eſt formulam $\int v\,\partial\Phi$ quoque integrabilem eſſe debere; tum vero neceſſe eſt vt ſit

$$\int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} = z\sqrt{(nn-1)}.$$

§. 18. Cum autem ſit $z = c\sqrt{(1 - xx - yy)}$, ſupra vidimus ob

$$x = -v\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et}$$

$$y = v\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cof.}\,\Phi, \text{ fore}$$

$$xx + yy = vv + \frac{\partial v^2}{\partial\Phi^2};$$

ſicque

ſicque totum negotium reductum eſt ad hanc aequationem:

$$\int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} = c\sqrt{(nn-1)\left(1-vv-\frac{\partial v^2}{\partial\Phi^2}\right)},$$

ad quam reſoluendam ponamus $v = f\,\text{cof.}(\lambda\Phi+\alpha)$, eritque

$$\int v\,\partial\Phi = \frac{f}{\lambda}\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha) \text{ et}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\Phi} = -\lambda f\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha),$$

vnde habebimus

$$\int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{f(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha),$$

qui ergo eſt valor membri ſiniſtri noſtrae aequationis.

§. 19. Pro membro autem dextro primo erit

$$vv = ff\,\text{cof.}(\lambda\Phi+\alpha)^2 \text{ et}$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial\Phi^2} = \lambda^2 f^2\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha)^2;$$

quamobrem habebimus

$$1-vv = 1-ff\,\text{cof.}(\lambda\Phi+\alpha)^2,$$

qui valor vt cum poſtrema parte conſpiret, ſumatur $f = 1$, vt fiat $1-vv = \text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha)^2$, hocque modo noſtra aequatio erit

$$\frac{(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha) = c\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha)\sqrt{(nn-1)(1-\lambda\lambda)},$$

quae per $\sqrt{(1-\lambda\lambda)}\,\text{ſin.}(\lambda\Phi+\alpha)$ diuiſa praebet

$$\frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda)}}{\lambda} = c\sqrt{(nn-1)}$$

vnde numerus hactenus indefinitus λ ita determinatur, vt ſit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1+(nn-1)cc}}$. Vel etiam numerum λ arbitrio noſtro relinquere poſſumus, indeque numerum illum n definire, qui ergo erit $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, vbi tantum notari oportet, numerum λ ita accipi debere, vt numerus $1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc$ prodeat poſitiuus, id quod eueniet quando fuerit $\lambda < \frac{1}{\sqrt{(1-cc)}}$; tum vero etiam, vt iam notauimus, numerus n vnitate maior eſſe debet,

ad quod requiritur vt sit $\lambda < 1$, atque adeo hanc conditionem obseruasse sufficiet: dummodo enim $\lambda < 1$, etiam semper erit $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc > 0$, simulque $n > 1$.

§. 20. Quaecunque igitur fractio vnitate minor pro λ accipiatur, indeque capiatur $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, habebimus

$$v = \text{cos.}(\lambda\Phi + \alpha),$$
$$\frac{\partial v}{\partial \Phi} = -\lambda \,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha) \text{ et}$$
$$\int v\,\partial\Phi = \tfrac{1}{\lambda}\,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha),$$

vnde coordinatae proiectionis curuae quaesitae in planum aequatoris factae ita determinabuntur, vt sit

$$x = -\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}(\lambda\Phi + \alpha) - \lambda\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha) \text{ et}$$
$$y = \text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}(\lambda\Phi + \alpha) - \lambda\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha),$$

ex quibus porro colligitur

$$xx + yy = \text{cos.}(\lambda\Phi + \alpha)^2 + \lambda\lambda\,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha)^2, \text{ siue}$$
$$xx + yy = 1 - (1 - \lambda\lambda)\,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha)^2.$$

At vero per notas reductiones ambae coordinatae ita repraesentari poterunt:

$$x = -\tfrac{1+\lambda}{2}\,\text{cos.}[(\lambda-1)\Phi+\alpha] - \tfrac{1-\lambda}{2}\,\text{cos.}[(\lambda+1)\Phi+\alpha]$$
$$y = \tfrac{1-\lambda}{2}\,\text{sin.}[(\lambda+1)\Phi+\alpha] - \tfrac{1+\lambda}{2}\,\text{sin.}[(\lambda-1)\Phi+\alpha],$$

tum autem longitudo ipsius curuae in superficie sphaeroidica descriptae erit

$$s = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{1-\lambda\lambda}{\lambda}\,\text{sin.}(\lambda\Phi + \alpha).$$

§. 21. Has formulas multo simpliciores reddere licet, sumendo angulum constantem $\alpha = 0$. Quoniam enim per variationem huius anguli α tantum positio coordinatarum x et y immutatur, dum ipsa curua eadem manet, sine vlla solutionis restrictione tuto statuere poterimus $\alpha = 0$; tum autem coordinatae

natae x et y ita concinnius exprimentur:

$$x = -\frac{1+\lambda}{2}\text{cof.}\,(1-\lambda)\,\Phi - \frac{(1-\lambda)}{2}\text{cof.}\,(1+\lambda)\,\Phi,$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2}\text{fin.}\,(1+\lambda)\,\Phi + \frac{(1+\lambda)}{2}\text{fin.}\,(1-\lambda)\,\Phi,$$

tum autem erit longitudo curuae in ſuperficie deſcriptae

$$s = \frac{1-\lambda\lambda}{\lambda}\text{fin.}\,\lambda\,\Phi,$$

quae ergo euaneſcit vbi $\Phi = 0$, et eo vsque extenditur, quoad angulus $\lambda\,\Phi$ euadat rectus, a quo termino curua iterum recedere incipit.

§. 23. In hac euolutione quantitas c, qua ſpecies ſphaeroidis exprimitur, aliter in computum non eſt ingreſſa, niſi in numero n, quem inuenimus $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, et quo ratio continetur, quam longitudo curuae quaeſitae ad altitudinem z tenet; vnde haec proprietas notatu maxime digna conſequitur: quod pro omnibus ſphaeroidibus ellipticis, ſiue ſint oblonga ſiue compreſſa, lineae rectificabiles, in eorum ſuperficiebus ducendae, ſi in planum aequatoris proiiciantur, ad easdem proiectiones perducant; ita vt ſolutio huius problematis plane congruat cum ſolutione eius, quo lineae rectificabiles in ſuperficie ſphaerica quaeruntur. Atque adeo praeſens ſolutio illi, qua hactenus iſtud problema pro ſphaera eſt ſolutum, ideo longiſſime anteferenda videtur, quod per certam methodum ad ſcopum optatum perduxit, cum ſolutio vulgaris caſui fortuito accepta ſit referenda.

Applicatio praecedentis Solutionis ad corpora conoidica hyperbolica.

§. 23. Quoniam quantitas c, qua ſemiaxem ellipſis generantis CB deſignauimus, ex calculo fere penitus eſt egreſſa, manifeſtum eſt noſtram ſolutionem etiam locum habere

posse, licet ista quantitas c fiat adeo imaginaria, id quod euenit, quando ellipsis initio considerata transmigrat in hyperbolam, cuius centrum erit etiamnunc in c et semiaxis transuersus $CA = 1$, vt ante. Ad hunc igitur casum euoluendum tantum opus est vt loco c quantitatem imaginariam statuamus, ponendo $cc = -aa$, siue $c = a\sqrt{-1}$.

§. 24. Omnia igitur, quae supra euoluimus, prorsus immutata manebunt, sola illa aequatione, qua numerum n definiuimus, excepta, quae posito $c = a\sqrt{-1}$ recipiet hanc formam:

$$n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda-\lambda\lambda aa)}}{\lambda\sqrt{-a}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda\lambda(1+aa)-1}{aa}};$$

vbi patet esse debere $\lambda\lambda(aa+1) > 1$, siue $\lambda > \frac{1}{\sqrt{(aa+1)}}$, tum vero, quia etiam esse debet $n > 1$, tam haec quam praecedens conditio adimplebitur, dummodo capiatur $\lambda > 1$. Quamobrem tota solutio huius casus a praecedente in hoc tantum discrepabit, quod hic numerum λ vnitate maiorem accipi oportet, cum ante vnitate minor fuisset; quamobrem coordinatae proiectionis nunc ita exprimentur:

$$x = -\frac{\lambda+1}{2}\cos.(\lambda-1)\Phi + \frac{\lambda-1}{2}\cos.(\lambda+1)\Phi,$$

$$y = -\frac{\lambda-1}{2}\sin.(\lambda-1)\Phi - \frac{\lambda+1}{2}\sin.(\lambda-1)\Phi,$$

ex hisque erit

$$xx+yy = 1+(\lambda\lambda-1)\sin.\lambda\Phi^2,$$

ipsa autem curuae in superficie descriptae longitudo erit

$$s = -\frac{\lambda\lambda-1}{\lambda}\sin.\lambda\Phi,$$

vbi signum negationis nihil in figura curuae turbat, dum tantum in partem vergit contrariam ei quam in calculo spectauimus. Hoc igitur modo solutio nostra multo latius est extensa quam primo initio sperare licuisset.

DE

DE SVPERFICIE CONI SCALENI,

VBI IMPRIMIS INGENTES DIFFICVLTATES, QVAE IN HAC INVESTIGATIONE OCCVRRVNT, PERPENDVNTVR.

Auctore.
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 12 *Septembr.* 1786.

§. 1.

Sit circulus E G F H baſis coni ſcaleni propoſiti, cuius vertex in ſublimi ſitus ſit A, vnde ad planum baſis demittatur perpendiculum A B, et ex B per centrum baſis C agatur recta F B C E. Vocetur altitudo $AB = a$, deinde vero ſit $BC = b$, quae linea exhibet coni obliquitatem; ſi enim eſſet $b = 0$, conus foret rectus. Denique vero vocetur radius baſis $CE = CF = c$, ac manifeſtum eſt his tribus quantitatibus a, b, c naturam coni penitus determinari. Hinc ſi ad verticem ductae intelligantur rectae E A et F A, ob $BE = c + b$ et $BF = c - b$, erit $AE = \sqrt{aa + (c+b)^2}$, quod eſt latus coni maximum; latus vero minimum erit $AF = \sqrt{aa + (c-b)^2}$. Praeterea ſi in baſi ducatur diameter G H ad E F normalis, rectae A G et A H erunt latera media coni inter ſe aequalia; ad quorum quantitatem inueniendam, quoniam

Tab. I. Fig. 5.

am est $AC = \sqrt{(aa+bb)}$ et triangula ACG et ACH ad C rectangula, erit $AG = AH = \sqrt{(aa+bb+cc)}$.

§. 2. Quoniam igitur nobis propositum est superficiem huius coni scaleni indagare, quemadmodum ea scilicet per terna elementa a, b et c definiatur, haec inuestigatio facillime sequenti modo instituetur. Ducto coni latere maximo AE, in basi coni, ex centro C, capiatur angulus indefinitus $ECS = \Phi$, qui suo differentiali $SCs = \partial\Phi$ augeatur, ac vocetur portio superficiei conicae inter rectas AE et AS atque arcum ES inclusa $= S$, ita vt posito $\Phi = 180°$ punctum S in F perueniat, et ista quantitas S nobis sit indicatura semissem superficiei conicae, eiusque ergo duplum totam superficiem coni quaesitam. Quodsi iam ex A ducamus rectam proximam As, area trianguli elementaris SAs dabit valorem differentialis ∂S, ita vt totum negotium huc redeat, vt area istius trianguli SAs exploretur, quod ob arculum $Ss = c\partial\Phi$, ideoque infinite paruum, tanquam triangulum rectilineum spectari potest.

§. 3. Hunc in finem ducatur ad S tangens circuli SP, siue, quod eodem redit, producatur elementum Ss, ita vt recta SP sit basis Ss producta; vnde si ex A ad eam ducatur perpendicularis AP, erit area trianguli ASs, siue

$$\partial S = \frac{Ss \cdot AP}{2} = \tfrac{1}{2} AP \cdot c\partial\Phi.$$

Constat autem hoc perpendiculum AP duci, si ex puncto B ad rectam SP demittatur perpendiculum BP, quandoquidem tum etiam recta AP ei erit normalis. Iam ex C ad rectam BP normaliter agatur recta CQ, et quia BP parallela est radio CS, erit angulus $CBQ = \Phi$, vnde ob $BC = b$ erit $CQ = b \sin.\Phi$ et $BQ = b \cos.\Phi$. Quare cum sit $PQ = CS = c$, erit $BP = c + b$

$c + b \cos.\Phi$ et interuallum $SP = CQ = b \sin.\Phi$, ideoque ex triangulo APB, quia AB ad BP eſt perpendicularis, reperietur hypothenaſa $AP = \sqrt{aa + (c + b\cos.\Phi)^2}$, conſequenter hinc elicimus elementum ſuperficiei quaeſitum

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\,\partial\Phi \sqrt{aa + (c + b\cos.\Phi^2)}$$

Sicque tota inueſtigatio huc eſt perducta, vt iſta formula differentialis integretur.

§. 4. Conſideremus primo caſum coni recti, qui prodit facta obliquitate $b = 0$. Hoc ergo caſu habebimus $\partial S = \tfrac{1}{2} c\,\partial\Phi\sqrt{(aa + cc)}$, vnde integrando fit $S = \tfrac{1}{2} c\,\Phi\sqrt{(aa+cc)}$. Fiat nunc $\Phi = 180°$, ſiue $\Phi = \pi$, et ſemiſſis ſuperficiei conicae erit $= \tfrac{1}{2}\pi c\sqrt{(aa + cc)}$, ideoque tota coni ſuperficies $= \pi c\sqrt{(aa + cc)}$; vbi notetur, formulam $\sqrt{(aa + cc)}$ exprimere latus huius coni recti; tum vero, totam baſis peripheriam eſſe $= 2\pi c$. Conſtat autem ſuperficiem coni recti inueniri, ſi latus coni ducatur in dimidiam baſis circumferentiam.

§. 5. Hinc autem facile intelligitur pro conis ſcalenis hanc inueſtigationem multo magis fieri arduam; propterea quod ea pendet ab integratione huius formulae:

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\,\partial\Phi\sqrt{aa + (c + b\cos.\Phi)^2},$$

quae euolata praebet

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\,\partial\Phi\sqrt{aa + cc + 2bc\cos.\Phi + bb\cos.\Phi^2},$$

quae ob $\cos.\Phi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.2\Phi$ etiam transmutari poteſt in hanc formam:

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\,\partial\Phi\sqrt{(aa + \tfrac{1}{2}bb + cc + 2bc\cos.\Phi + \tfrac{1}{2}bb\cos.2\Phi)}.$$

Huius autem formulae integratio abſoluta nullo modo ſperari poteſt, ſiquidem certum eſt, eam neque per logarithmos, neque

que per arcus circulares expediri poſſe; quamobrem nobis tantum in approximationibus erit acquiescendum.

§. 6. Ponamus breuitatis gratia $aa + \frac{1}{2}bb + cc = ff$, vt habeamus:

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\, \partial \Phi \sqrt{ff + 2bc \cos.\Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi},$$

vbi primo obſeruandum occurrit, ſi quantitas ff fuerit valde magna prae binis reliquis terminis, tum approximationem nullam moram faceſſere; ſi enim ponamus

$$2bc \cos.\Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi = v,$$

vt ſit $\partial S = \frac{1}{2} c\, \partial \Phi \sqrt{(ff + v)}$, facta euolutione erit

$$\sqrt{(ff+v)} = f + \tfrac{1}{2}\tfrac{v}{f} - \tfrac{1.1}{2.4}\tfrac{vv}{f^3} + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\tfrac{v^3}{f^5} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\tfrac{v^4}{f^7} \text{ etc.}$$

quae ſeries eo magis conuergit, quo minor erit quantitas v prae ff; vnde ſufficiet huius ſeriei vel tantum binos terminos priores accipere, vel inſuper tertium, vel adeo etiam quartum pluresue admittere, vnde aliquot caſus euoluamus.

Caſus I.

quo approximatio in ſecundo termino ſubſiſtit.

§. 7. Hoc igitur caſu habebimus

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\, \partial \Phi \left(f + \tfrac{v}{2f}\right),$$

vbi primus terminus integratus dat $\frac{1}{2} f c \Phi$, ſecundus vero terminus, ob

$$v = 2bc \cos.\Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi,$$

integratus praebet

$$\tfrac{c}{4f} \int \partial \Phi \left(2bc \cos.\Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi\right)$$
$$= \tfrac{c}{4f} \left(2bc \sin.\Phi + \tfrac{1}{4} bb \sin. 2\Phi\right),$$

ita

ita vt iam ſit

$$S = \tfrac{1}{2} c f \Phi + \frac{b c c \sin. \Phi}{2f} + \frac{b b c \sin. 2\Phi}{16 f}.$$

Fiat nunc $\Phi = \pi$, ac formula duplicata dabit totam coni ſuperficiem $= \pi c f$, quae reſtituto pro f valore erit

$$S = \pi c \sqrt{(a a + \tfrac{1}{2} b b + c c)},$$

quae ergo ſufficere poteſt, quoties quantitates $2 b c$ et $\tfrac{1}{2} b b$ fuerint quam minimi reſpectu quantitatis $a a + \tfrac{1}{2} b b + c c$. Haec conditio imprimis locum habet, quando altitudo coni fuerit permagna prae obliquitate b atque etiam radio baſis c. Ante autem vidimus, ſi obliquitas coni prorſus euaneſceret, ſuperficiem coni recti eſſe $= \pi c \sqrt{(a a + c c)}$, nunc igitur ſuperficies tantillo eſt maior in ratione

$$\sqrt{(a a + c c)} : \sqrt{(a a + \tfrac{1}{2} b b + c c)}.$$

Caſus II.

quo approximatio in tertio termino ſubſiſtit.

§. 8. Quoniam hic tantum ſuperficiem coni quaerimus, ſtatim ponere poſſumus $S = c \partial \Phi \sqrt{(f f + v)}$; tum enim integratione peracta tantum opus eſt facere $f = \pi$. Praeſenti igitur caſu erit

$$\partial S = c \partial \Phi \left(f + \frac{v}{2f} - \frac{v v}{8 f^3}\right);$$

modo autem vidimus binos terminos priores dare $\pi c f$, ita vt ſit $S = \pi c f - \frac{c}{8 f^3} \int v v \partial \Phi$. Eſt vero

$$v v = 4 b b c c \cos. \Phi^2 + 2 b^3 c \cos. \Phi \cos. 2\Phi + \tfrac{1}{4} b^4 \cos. 2\Phi^2,$$

quae formula ob

$$\cos. \Phi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos. 2\Phi;$$
$$\cos. \Phi \cos. 2\Phi = \tfrac{1}{2} \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} \cos. 3\Phi \text{ et}$$
$$\cos. 2\Phi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos. 4\Phi,$$

transformatur in hanc:

$$v\,v = 2\,b\,b\,c\,c + \tfrac{1}{8}\,b^4 + b^3\,c\,\text{cos.}\,\Phi + 2\,b\,b\,c\,c\,\text{cos.}\,2\Phi + b^3\,c\,\text{cos.}\,3\,\Phi + \tfrac{1}{8}\,b^4\,\text{cos.}\,4\,\Phi,$$

quae ergo formula conſtat quatuor membris, quorum primum tantum in integratione eſt conſiderandum, propterea quod ſequentes termini integrati darent ſin. Φ; ſin. $2\,\Phi$; ſin. $3\,\Phi$ et ſin. $4\,\Phi$, qui poſito $\Phi = \pi$ omnes in nihilum abeunt, ita vt pro hoc caſu ſit $\int v\,v\,\partial\,\Phi = \pi\,(2\,b\,b\,c\,c + \tfrac{1}{8}\,b^4)$, quamobrem tota coni ſuperficies erit $S = \pi\,c\,f - \frac{\pi\,b\,b\,c^3}{4f^3} - \frac{\pi\,b^4\,c}{64f^3}$, quae formula iam multo propius ad veritatem accedit, quam ea quae caſu primo eſt inuenta.

Caſus III.

quo approximatio in quarto termino ſiſtitur.

§. 9. Hic igitur ad expreſſionem modo inuentam inſuper adiici debet valor, qui ex hac formula integrali reſultat: $\frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{c}{f^3}\int v^3\,\partial\,\Phi$, poſtquam ſcilicet poſitum fuerit $\Phi = \pi$. Modo autem vidimus eſſe

$$v\,v = 2\,b\,b\,c\,c + \tfrac{1}{8}\,b^4 + b^3\,c\,\text{cos.}\,\Phi + 2\,b\,b\,c\,c\,\text{cos.}\,2\Phi + b^3\,c\,\text{cos.}\,3\,\Phi + \tfrac{1}{8}\,b^4\,\text{cos.}\,4\,\Phi,$$

quae forma per $v = 2\,b\,c\,\text{cos.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,b\,b\,\text{cos.}\,2\,\Phi$ multiplicata, retentis tantum terminis conſtantibus, qui facta reductione ſupererunt, dabit

$$v^3 = b^4\,c\,c + \tfrac{1}{2}\,b^4\,c\,c = \tfrac{3}{2}\,b^4\,c\,c,$$

vnde fit $\int v^3\,\partial\,\Phi = \frac{3}{2}\,\pi\,b^4\,c\,c$, ita vt pars adiicienda ſit $\frac{3\,\pi\,b^4\,c^3}{32\,f^5}$, conſequenter adiecta etiam hac parte habebimus accuratius

$$S = \pi\,c\,f - \frac{\pi\,b\,b\,c^3}{4f^3} - \frac{\pi\,b^4\,c}{64f^3} + \frac{3\,\pi\,b^4\,c^3}{32\,f^5}.$$

§. 10.

§. 10. Contemplemur hic casum, quo obliquitas b ipsi radio baseos est aequalis, siue vbi perpendiculum A B in ipsum punctum F incidit. Facto igitur $b = c$, superficies huius coni, dum approximatio vsque ad quartum terminum producitur, erit

$$S = \pi c f - \frac{17\pi c^5}{64 f^3} + \frac{3\pi c^7}{32 f^5}, \text{ siue}$$

$$S = \pi c f \left(1 - \frac{17 c^4}{64 f^4} + \frac{3 c^6}{32 f^6}\right),$$

vbi notetur esse $ff = aa + \frac{3}{2} cc$. Haec expressio eo propius ad veritatem accedit, quo maior fuerit quantitas f prae radio basis c. Ita si altitudo coni diametro baseos aequetur, ita vt sit $ff = \frac{11}{2} cc$, tum superficies huius coni erit

$$S = \pi c \sqrt{\tfrac{11}{2}} \cdot \left(1 - \frac{17}{16.121} + \frac{3}{4.1331}\right),$$

quae partes in vnam contractae praebent superficiem coni

$$S = \tfrac{21101}{21296} \pi c \sqrt{\tfrac{11}{2}}.$$

§. 11. Hanc autem approximandi methodum non ad plures terminos prosequimur, quoniam calculus nimis fieret molestus, neque vlla lex progressionis perspici posset. Plerumque autem approximatio postrema sufficere posse videtur, dummodo quantitas f notabiliter superet ambas quantitates b et c. Tentemus autem aliam methodum, quae quidem pariter postulat vt altitudo coni a plurimum superet bina reliqua elementa b et c, quae autem quandam legem progressionis pollicetur, ita vt approximationem pro lubitu continuo vlterius persequi liceat.

Alia methodus
approximandi quando a multum superat b et c.

§. 12. Hic scilicet formulam $(c + b \cos.\Phi)^2$ non euolvemus, sed cum sit per seriem

$$\sqrt{[aa+(c+f\cos.\Phi)^2]} = a + \tfrac{1}{2}\frac{(c+b\cos.\Phi)^2}{a} - \frac{1.1}{2.4}\frac{(c+b\cos.\Phi)^4}{a^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{(c+b\cos.\Phi)^6}{a^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\frac{(c+b\cos.\Phi)^8}{a^7} + \text{etc.}$$

ſingulas poteſtates pares ipſius $c+b\cos.\Phi$ ita euoluamus, vt ſtatim omnes poteſtates ipſius $\cos.\Phi$ ad coſinus ſimplices reuocemus; tum enim omnia membra per quempiam coſinum affecta tuto reiicere poterimus, propterea quod in integratione praebent ſinus angulorum multiplorum ipſius Φ, qui poſito $\Phi = \pi$ omnes in nihilum eſſent abituri.

§. 13. Quo igitur hoc negotium facilius expediri queat, ante omnia obſeruaſſe iuuabit, omnes poteſtates impares ipſius $\cos.\Phi$ nullam ſuppeditare quantitatem abſolutam, ita vt has poteſtates penitus omittere liceat; ex poteſtatibus autem paribus ſequentes naſcuntur quantitates abſolutae:

$$\cos.\Phi^2 = \tfrac{1}{2};$$
$$\cos.\Phi^4 = \frac{1.3}{2.4};$$
$$\cos.\Phi^6 = \frac{1.3.5}{2.4.6};$$
$$\cos.\Phi^8 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8};\ \text{etc.}$$

Iuxta hanc igitur regulam poteſtates pares binomii $c+b\cos.\Phi$ euoluamus eritque:

$$(c+b\cos.\Phi)^2 = cc + \tfrac{1}{2}bb,$$
$$(c+b\cos.\Phi)^4 = c^4 + 3bbcc + \frac{1.3}{2.4}b^4,$$
$$(c+b\cos.\Phi)^6 = c^6 + \tfrac{15}{2}bbc^4 + \frac{1.3.15}{2.4}b^4cc + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^6.$$

Quin etiam res in genere hoc modo expedietur:

$$(c+b\cos.\Phi)^{2n} = c^{2n} + \frac{2n}{1}\cdot\frac{(2n-1)}{2}\cdot\tfrac{1}{2}b^2c^{2n-2} + \frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\cdot\frac{2n-3}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}b^4c^{2n-4} + \frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\cdot\frac{2n-3}{4}\cdot\frac{2n-4}{5}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}b^6c^{2n-6} + \text{etc.}$$

§. 14.

§. 14. Introducamus nunc iſtos valores in ſeriem pro $\sqrt{[aa + (c + b \cos. \Phi)^2]}$ exhibitam, et ſtatim per πc multiplicemus, atque integra coni ſuperficies ſequenti modo exprimetur:

$$S = \pi c a + \frac{1}{2}\frac{\pi c}{a}\left(cc + \frac{1}{2} bb\right) - \frac{1.1.\pi c}{2.4\,a^3}\left(c^4 + 3\,bb\,cc + \frac{1.3}{2.4} b^4\right)$$
$$+ \frac{1.1.3\,\pi c}{2.4.6\,a^5}\left(c^6 + \frac{15}{2} bb\,c^4 + \frac{1.3.15}{2.4} \cdot b^4 cc + \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6\right)$$
$$- \frac{1.1.3.5\,\pi c}{2.4.6.8\,a^7}\left(c^8 + \frac{8.7.1}{1.2.2} bb\,c^6 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.3}{2.4} b^4 c^4\right.$$
$$\left. + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6 cc + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} b^8\right).$$

§. 15. Quodſi ex ſingulis membris terminos tantum primos excerpamus, ii conſtituent hanc ſeriem:

$$\pi c\left(a + \frac{1}{2}\frac{cc}{a} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{c^4}{a^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{c^6}{a^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{c^8}{a^7} + \text{etc.}\right)$$

quae ſeries manifeſto conuenit cum ea quam formula $\sqrt{(aa + cc)}$ producit, quamobrem loco omnium terminorum primorum ſcribere licebit $\pi c \sqrt{(aa + cc)}$. Simili modo ſecundos terminos ſingulorum membrorum excerpamus, qui dabunt hanc ſeriem:

$$\frac{\pi b b c}{2}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1.1.6\,cc}{2.4\,a^3} + \frac{1.1.3.15\,c^4}{2.4.6\,a^5} - \frac{1.1.3.5.28\,c^6}{2.4.6.8\,a^7} \text{ etc.}\right), \text{ ſiue}$$

$$\frac{\pi b b c}{2a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{cc}{aa} + \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{c^4}{a^4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{c^6}{a^6} \text{ etc.}\right)$$

quae etiam hoc modo repraeſentari poteſt:

$$\frac{\pi b b c}{4a}\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{cc}{aa} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{c^4}{a^4} - \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{c^6}{a^6} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{c^8}{a^8} \text{ etc.}\right)$$

cuius ſeriei valor manifeſto eſt $\left(1 + \frac{cc}{aa}\right)^{-\frac{3}{2}}$, ita vt ſumma omnium terminorum ſecundorum ſit $= \dfrac{\pi a a b b c}{4(aa + cc)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 16. Colligamus eodem modo omnia tertia membra ſingulorum terminorum, qui omnes affecti ſunt poteſtate b^4 et conſtituunt hanc ſeriem:

$$-\frac{1.1}{2.4}\pi c.\frac{1.5}{2.4}.\frac{b^4}{a^3}+\frac{1.1.3}{2.4.6}\pi c.\frac{1.3}{2.4}.\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\frac{b^4c^2}{a^5}$$
$$-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\pi c.\frac{1.3}{2.4}.\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{b^4c^4}{a^7}+\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\pi c.\frac{1.3}{2.4}.$$
$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.\frac{b^4c^6}{a^9}.\text{ etc.}$$

qui termini reducuntur ad sequentem expressionem:

$$-\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi b^4 c}{2a^3}\left(3.1.-\frac{3.5.3}{2}.\frac{cc}{aa}+\frac{3.5.7.5}{2.4}.\frac{c^4}{a^4}-\frac{3.5.7.9.7}{2.4.6}.\frac{c^6}{a^6}+\text{etc.}\right)$$

§. 17. Ista series sequenti modo in clariorem ordinem redigi poterit:

$$-\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi b^4 c}{8a^3}\left(1-\frac{5.3}{2}.\frac{cc}{aa}+\frac{5.7.5}{2.4}.\frac{c^4}{a^4}-\frac{5.7.9.7}{2.4.6}.\frac{c^6}{a^6}+\text{etc.}\right).$$

Ponamus hic breuitatis gratia $\frac{cc}{aa}=xx$, atque factorem communem $-\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi b^4 c}{8a^3}$ multiplicari oportebit per hanc seriem:

$$s=1-\frac{5.3}{2}xx+\frac{5.7.5}{2.4}x^4-\frac{5.7.9.7}{2.4.6}x^6+\frac{5.7.9.11.9}{2.4.6.8}x^8-\text{etc.}$$

Haec series iam satis est regularis, et nisi postremi factores numerici adessent, eius summatio in promptu foret. Ad hos igitur factores tollendos vtamur integratione, ac reperiemus

$$\int s\,\partial x=x-\frac{5}{2}x^3+\frac{5.7}{2.4}x^5-\frac{5.7.9}{2.4.6}x^7+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}x^9-\text{etc.}$$

Nouimus autem esse

$$(1+xx)^{-\frac{5}{2}}=1-\frac{5}{2}xx+\frac{5.7}{2.4}x^4-\frac{5.7.9}{2.4.6}x^6+\text{etc.},$$

vnde patet fore $\int s\,\partial x=x(1+xx)^{-\frac{5}{2}}$, hincque differentiando colligitur

$$s=(1+xx)^{-\frac{5}{2}}-5xx(1+xx)^{-\frac{7}{2}},\text{ siue}$$

$$s=\frac{1-4xx}{(1+xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

§. 18.

§. 18. Reſtituamus nunc loco xx valorem $\frac{cc}{aa}$, fietque $s = \frac{a^5(aa-4cc)}{(aa+cc)^{\frac{7}{2}}}$, qui valor multiplicatus per factorem communem $-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi b^4 c}{8a^5}$, dabit ſummam omnium terminorum tertiorum, quae ergo erit

$$= -\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi aab^4c}{8.}\cdot\frac{aa-4cc}{(aa+cc)^{\frac{7}{2}}};$$

quamobrem ſi iſtae ſummae terminorum primorum, ſecundorum ac tertiorum coniungantur, pro ſuperficie noſtri coni ſcaleni nanciſcemur ſequentem expreſſionem:

$$S = \pi c\sqrt{(aa+cc)} + \frac{\pi aabbc}{4(aa+cc)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi aab^4c(aa-4cc)}{8(aa+cc)^{\frac{7}{2}}},$$

ita vt tantum ſuperſit inſuper terminos quartos, quintos etc. inueſtigare, quos autem plerumque negligere licebit. Facile autem intelligitur, ſi etiam hos terminos ſummare voluerimus, denominatores futuros eſſe $(aa+cc)^{\frac{11}{2}}$; $(aa+cc)^{\frac{11}{2}}$ etc. verum numeratores nimis operoſum foret explorare.

§. 19. Tentemus igitur ſummationem terminorum quartorum, qui adhibita ſimili operatione talem progreſſionem ſuppeditant, cuius factor communis eſt

$$\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3.5}{1.2\ldots6}\cdot\frac{\pi b^6 c}{a^5} = \frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{\pi b^6 c}{a^5}$$

in quem duci debebit haec ſeries:

$$3 - \frac{7.5.3}{2}\cdot\frac{c^2}{a^2} + \frac{7.9.7.5}{2.4}\cdot\frac{c^4}{a^4} - \frac{7.9.11.9.7}{2.4.6}\cdot\frac{c^6}{a^6} + \frac{7.9.11.13.11.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{c^8}{a^8} \text{ etc.}$$

Fiat igitur iterum $\frac{cc}{aa} = xx$, ac ponatur

$$s = 3 - \frac{7.5.3}{2}xx + \frac{7.9.7.5}{2.4}x^4 - \frac{7.9.11.9.7}{2.4.6}x^6 + \frac{7.9.11.13.11.9}{2.4.6.8}x^8 \text{ etc.}$$

cuius

cuius ergo seriei summam indagari oportet, id quod sequenti modo sumus expedituri.

§. 20. Primo scilicet, vt factores postremi tollantur, per integrationem formetur ista series:

$$\int s\,\partial x = 3x - \frac{7\cdot 5}{2}x^3 + \frac{7\cdot 9\cdot 7}{2\cdot 4}x^5 - \frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^7 + \frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^9 \text{ etc.}$$

Vt nunc hinc denuo vltimos factores tollamus, multiplicemus per $x\,\partial x$ et integrando reperiemus

$$\int x\,\partial x \int s\,\partial x = x^3 - \frac{7}{2}x^5 + \frac{7\cdot 9}{2\cdot 4}x^7 - \frac{7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{11} \text{ etc.}$$

Cum igitur sit

$$(1+xx)^{-\frac{7}{2}} = 1 - \frac{7}{2}xx + \frac{7\cdot 9}{2\cdot 4}x^4 - \frac{7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 \text{ etc.}$$

manifestum est fore

$$\int x\,\partial x \int s\,\partial x = x^3(1+xx)^{-\frac{7}{2}}$$

cuius differentiale per $x\,\partial x$ diuisum dabit

$$\int s\,\partial x = 3x(1+xx)^{-\frac{7}{2}} - 7x^3(1+xx)^{-\frac{9}{2}}$$

haecque formula denuo differentiata praebet

$$s = 3(1+xx)^{-\frac{7}{2}} - 42xx(1+xx)^{-\frac{9}{2}} + 63x^4(1+xx)^{-\frac{11}{2}}$$

quae expressio porro reducitur ad hanc:

$$s = \frac{3 - 36xx + 24x^4}{(1+xx)^{\frac{11}{2}}}.$$

Scribendo igitur $\frac{cc}{aa}$ loco xx erit

$$s = \frac{a^7(3a^4 - 36aacc + 24c^4)}{(aa+cc)^{\frac{11}{2}}}$$

quae formula, ducta in factorem communem $\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{\pi b^6 c}{a^5}$, praebet

bet ſummam omnium terminorum quartorum

$$= \frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{\pi a a b^6 c (3a^4 - 36 a a c c + 24 c^4)}{(a a + c c)^{\frac{11}{2}}}.$$

§. 21. Euolutio iſta poſtrema nobis hoc eximium commodum praeſtat, vt etiam legem, qua ſequentium terminorum ſummae progrediuntur, patefaciat. Quemadmodum enim, ſi ſumma terminorum tertiorum ſtatuatur $= - \frac{1.3}{2^2.4^2} \cdot \frac{\pi b^4 c}{a^3} \cdot s$, poſito $\frac{c c}{a a} = x x$, pro s peruenimus ad hanc aequationem: $\int s \partial x = x (1 + x x)^{-\frac{5}{2}}$, ita pro terminis quartis, ſi earum ſumma ponatur $= \frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{\pi b^6 c}{a^5} s$, pro s inuenimus hanc aequationem: $\int x \partial x \int s \partial x = x^3 (1 + x x)^{-\frac{7}{2}}$. Hoc modo facile patet, ſi ſumma terminorum quintorum ponatur $= - \frac{1.3.5.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} \cdot \frac{\pi b^8 c}{a^7} \cdot s$, tum pro quantitate s inuenienda prodituram eſſe hanc aequationem:

$$\int x \partial x \int x \partial x \int s \partial x = x^5 (1 + x x)^{-\frac{9}{2}}.$$

Eodemque modo pro terminis ſextis, ſi eorum ſumma ſtatuatur $= \frac{1.3.5.7.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} \cdot \frac{\pi b^{10} c}{a^9} s$, tum quantitas s ex hac aequatione definiri debebit:

$$\int x \partial x \int x \partial x \int x \partial x \int s \partial x = x^7 (1 + x x)^{-\frac{11}{2}};$$

ſicque lex progreſſionis in infinitum penitus eſt manifeſta.

§. 22. Quoniam igitur ſummam terminorum quartorum nobis pariter euoluere licuit, eam inſuper ad ſummam praecedentium addamus, atque ſuperficies noſtri coni ſcaleni nunc accuratius ſequenti forma exprimetur:

$$\pi c\sqrt{(aa+cc)}+\frac{\pi aabbc}{2^2(aa+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1.3}{2^2.4^2}\cdot\frac{\pi aab^4c(aa-4cc)}{(aa+cc)^{\frac{7}{2}}}$$
$$+\frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{\pi aab^6c(3a^4-36aacc+24c^4)}{(aa+cc)^{\frac{11}{2}}}$$

quam formam ſemper adhibere licebit, quoties bb fuerit, valde paruum prae $aa+cc$, id quod duplici modo contingere poteſt, vel quando altitudo coni a plurimum ſuperat eius obliquitatem b, vel quando radius baſis c multum excedit obliquitatem b: atque ſi haec vtraque conditio locum habeat, iſta formula eo magis ad veritatem appropinquabit.

§. 23. Sin autem neutra harum conditionum locum inueniat, atque obliquitas b tam ratione altitudinis a quam radii baſeos c notabilem habeat magnitudinem, vel adeo hos terminos ſuperet, tum formula noſtra inuenta nullum plane vſum praeſtare poterit. His igitur caſibus maxima difficultas occurrit ſuperficiem coni definiendi, atque longe alia artificia deſiderantur, quorum beneficio iſta quaeſtio enodari queat.

§. 24. Conſideremus primo caſum, quo altitudo coni a penitus euaneſcit, ita vt pro elemento ſuperficiei habeamus hanc formulam: $\partial S=c\partial\Phi\sqrt{(c+b\cos.\Phi)^2}$, quam iam duplicavimus, ita vt integratione peracta tantum ſuperſit ſtatuere $\Phi=180^\circ=\pi$. Cum igitur ſignum radicale quadrato ſit praefixum, erit vtique $\partial S=c\partial\Phi(c+b\cos.\Phi)$, vnde integrando elicitur $S=cc\Phi+bc\sin.\Phi$, vnde facto $\Phi=180$ tota ſuperficies prodit $=\pi cc$, ſicque ipſi areae baſis erit aequalis, id quod per ſe eſt perſpicuum, quoties vertex coni intra baſin cadit; ſin autem extra baſin incidat, manifeſtum eſt ſuperficiem coni multo maiorem fore quam aream baſeos. Si enim talem conum charta ob-

obducere voluerimus, euidens eſt eo maius ſpatium requiri, quo longius vertex coni extra baſin fuerit remotus.

§. 25. Ponamus igitur verticem coni extra baſin in A incidere, ita vt ſit $CA = b$, exiſtente radio $CE = CF = c$, tum vero ex A ducantur rectae AM et AN baſis tangentes ac manifeſtum eſt ex baſis portione MEN, ſi ex ſingulis punctis ad A rectae ductae intelligantur, produci aream ex area circuli et trilineo AMFN compoſitam. Deinde ex altera baſeos parte MFN, ſi pariter ex ſingulis punctis ad A rectae agerentur, area prodibit itidem trilineo AMFN aequalis, ita vt tota coni ſuperficies aequalis ſit areae baſeos vna cum hoc trilineo bis ſumto. Ad hanc igitur aream inueniendam vocemus angulum $ACM = \zeta$, et cum ſit $AC = b$, erit recta tangens $AM = b \text{ ſin. } \zeta$, ideoque area trianguli $ACM = \frac{1}{2} b c \text{ ſin. } \zeta$, a quo aufferatur area ſectoris $FCM = \frac{1}{2} c c \zeta$, et remanebit area trilinei $AMF = \frac{1}{2} b c \text{ ſin. } \zeta - \frac{1}{2} c c \zeta$, cuius duplum dabit aream trilinei $AMFN = b c \text{ ſin. } \zeta - c c \zeta$, quamobrem tota ſuperficies huius coni, cuius altitudo a eſt quaſi infinite parua, erit $= \pi c c + 2 b c \text{ ſin. } \zeta - 2 c c \zeta$. Tab. I. Fig. 7.

§. 26. Cum igitur ſuper hac determinatione nullum dubium ſupereſſe poſſit, quaeritur, cur calculus hoc caſu tantopere a veritate abludat? Cauſa autem ſine vllo dubio in formula radicali $\sqrt{(c + b \text{ cof. } \Phi)^2}$ latet, quae cum duplicem ſignificationem inuoluat, alteram poſitiuam, alteram negatiuam, natura noſtrae quaeſtionis manifeſto tantum valorem poſitiuum poſtulat. Quare cum poſuerimus $\partial S = c \partial \Phi (c + b \text{ cof. } \Phi)$, haec poſitio eatenus tantum valet, quatenus quantitas $c + b \text{ cof. } \Phi$ eſt poſitiua, at vero, dum angulus Φ vltra rectum augetur, quia cof. Φ fit negatiuus, euadere poterit $c + b \text{ cof. } \Phi = 0$, quando ſcilicet fit $\text{cof. } \Phi = -\frac{c}{b}$. Quare cum ſupra, ducta tan-

gente AM, fuerit cof. A C M $=$ cof. $\zeta = \frac{c}{b}$, ſequitur, ſumto $\Phi = \pi - \zeta$ formulam $c + b$ cof. Φ euaneſcere; ſin autem angulus Φ vltra hunc terminum augeatur, eius valor euadet negatiuus, atque in locum formulae radicalis ſubſtitui debebit $-c - b$ cof. Φ.

§. 27. Ob hunc duplicem vſum formulae radicalis perſpicuum eſt, integrationem formulae noſtrae differentialis in duas partes diſtribui debere, quarum prior petenda erit ex formula $\partial S = c\,\partial\Phi\,(c + b \text{ cof. } \Phi)$, cuius integrale a $\Phi = 0$ tantum vsque ad terminum $\Phi = \pi - \zeta$ extendi debet, hinc ergo colligetur

$$S = c\,c\,(\pi - \zeta) + b\,c \text{ ſin. } \zeta;$$

alteram vero partem ex formula

$$\partial S = -c\,\partial\Phi\,(c + b \text{ cof. } \Phi)$$

deduci oportet, cuius integrale a termino $\Phi = \pi - \zeta$ vsque ad terminum $\Phi = \pi$ extendi debet. Cum igitur integrale hinc oriundum ſit $S = C - c\,c\,\Phi - b\,a$ ſin. Φ, conſtans ita definiatur, vt hoc integrale euaneſcat, ſumto $\Phi = \pi - \zeta$; eritque idcirco $C = c\,c\,(\pi - \zeta) + b\,c$ ſin. ζ. Fiat igitur nunc $\Phi = \pi$, atque altera pars noſtri integralis erit $= b\,c$ ſin. $\zeta - c\,c\,\zeta$, quae cum parte prius inuenta praebet totam huius coni ſuperficiem

$$\pi\,c\,c + 2\,b\,c \text{ ſin. } \zeta - 2\,c\,c\,\zeta,$$

quia iam valor cum veritate egregie conſpirat.

§. 28. Hoc caſu, quo $a = 0$ expedito, facile patet, etiam illis caſibus, quibus altitudo a eſt valde parua, reſolutionem bipartitam inſtitui debere. Verum hic ſtatim maxima ſe offert difficultas in euolutione formulae radicalis

$$\sqrt{a\,a + (c + b \text{ cof. } \Phi)^2}.$$

Cum

Cum enim altitudo a ſit valde exigua, ſeries more ſolito hinc nata prodit ita expreſſa:

$$c + b\cos.\Phi + \tfrac{1}{2}\frac{aa}{c+b\cos.\Phi} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^4}{(c+b\cos.\Phi)^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{a^6}{(c+b\cos.\Phi)^5} \text{ etc.}$$

quae ſeries vtique valde conuergit, quando formula $c+b\cos.\Phi$ multum ſuperat altitudinem a. Quoniam autem pariter transeundum eſt per eos caſus, quibus eſt $c+b\cos.\Phi = 0$, poſt primum terminum ſequentes omnes in infinitum abeunt, ideoque a veritate maxime abhorrent, atque adeo nullum adhuc artificium in Analyſi eſt repertum, quo huic incommodo medela afferri poſſet. His igitur caſibus recurrendum erit ad dimenſionem practicam, qua totam ſuperficiem coni in plures partes partiri et ſingularum areas ſeorſim exquirere ſolemus, id quod commodiſſime fiet, ſi ſuperficies coni in planum explicetur, cui operationi ſequens problema eſt deſtinatum.

Problema.

Si ſuperficies coni ſcaleni in planum explicetur, indolem figurae, quae hinc naſcetur, explorare.

Solutio.

§. 29. Concipiamus cono AEGFH, quem in figura 5 et 6 ſumus contemplati, chartam circumuolui, eamque iterum explicari in planum, veluti fig. 8. indicat, vbi A reſpondeat vertici coni, rectae autem AE et AF exhibeant latus maximum et minimum coni, ita vt area figurae EAF dimidiae ſuperficiei conicae ſit aequalis. Manentibus igitur denominationibus ſupra adhibitis, ſcilicet altitudine coni $AB = a$, obliquitate $BC = b$ et radio baſis $CE = CF = c$, erit in praeſenti figura latus maximum $AE = \sqrt{aa + (b+c)^2}$, latus vero minimum $AF = \sqrt{aa + (b-c)^2}$, longitudo autem curuae Tab. I. Fig. 8.

E S F aequabitur ſemiperipheriae baſeos coni, quae eſt πc. Euidens autem eſt iſtam curuam plurimum a natura circuli recedere, cuius ergo indolem et proprietates hic indagari oportet.

§. 30. Cum triangulum elementare A S s (fig. 6.) in ipſa ſuperficie coni ſit aſſumtum, id nunc in noſtro plano reperietur, et quoniam rectae S P et A P in plano trianguli erant ſitae, eae etiamnunc in noſtrum planum incident, eritque recta S P tangens curuae in puncto S, recta vero A P erit perpendiculum ex puncto A in hanc tangentem demiſſum; portio vero curuae E S aequabitur arcui circulari $E S = c\Phi$, (fig. 6.) poſito ſcilicet angulo $E C S = \Phi$. Quodſi ergo nunc has rectas vocemus $A S = v$, $AP = p$ et $SP = q$, erit ex iis quae ſupra attulimus $p = a a + (c + b \text{ cof. } \Phi)^2$ et $q q = b b \text{ ſin. } \Phi^2$, ſiue $q = b \text{ ſin. } \Phi$, vnde fit

$$v v = p p + q q = a a + b b + c c + 2 b c \text{ cof. } \Phi.$$

Hinc autem ſi vocemus aream $EAS = S$, vt ∂S exprimat aream trianguli elementaris A S s, erit vti ſupra inuenimus

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{a a + (c + b \text{ cof. } \Phi)^2} = \tfrac{1}{2} c p \partial \Phi.$$

Quodſi iam vocemus angulum $EAS = \omega$, vt ſit angulus $SAs = \partial \omega$, ob $A S = v$ area eiusdem trianguli erit $= \tfrac{1}{2} v v \partial \omega$, quamobrem habebitur haec aequatio: $v v \partial \omega = c p \partial \Phi$, ideoque $\partial \omega = \frac{c p \partial \Phi}{v v}$, ſiue habebimus

$$\partial \omega = \frac{c \partial \Phi \sqrt{a a + (c + b \text{ cof. } \Phi)^2}}{a a + b b + c c + 2 b c \text{ cof. } \Phi},$$

cuius ergo integrale nobis praebebit ipſum angulum E A S, angulo Φ reſpondentem; ac ſi tum fiat $\Phi = 180° = \pi$, prodibit angulus E A F, cuius ergo determinatio maxime eſt difficilis, cum neque per logarithmos neque per arcus circulares expediri queat.

§. 31.

§. 31. At vero haec figura continet alia ſymptomata, quae ſatis concinne exprimere licet. Primo ſcilicet, ſi angulus, quem tangens S P cum recta A S conſtituit, vocetur $A S P = \theta$, ſtatim habemus

$$\text{ſin. } \theta = \frac{p}{v} = \frac{\sqrt{a\,a + (c + b \cos. \Phi)^2}}{\sqrt{(a\,a + b\,b + c\,c + 2\,b\,c \cos. \Phi)}} \text{ et}$$

$$\text{cos. } \theta = \frac{q}{v} = \frac{b \sin. \Phi}{\sqrt{(a\,a + b\,b + c\,c + 2\,b\,c \cos. \Phi)}},$$

vnde patet in ipſo puncto E, vbi $\Phi = 0$, fieri cos. $\theta = 0$, ideoque rectam A E ad curuam in E eſſe normalem, quod idem quoque euenit in puncto F, vbi $\Phi = \pi$, ita vt in ambobus terminis E et F rectae A E et A F curuae normaliter inſiſtant; in punctis autem intermediis rectae A S cum curua angulos obliquos conſtituent, quemadmodum ex quantitate tangentis S P eſt manifeſtum. Vbi imprimis notaſſe iuuabit, ſi punctum S capiatur in ipſo puncto G (fig. 5.), vbi eſt $\Phi = 90°$, tum quantitatem tangentis $S P = q$ fore $= b$, ideoque ipſi obliquitati coni aequalem. In omnibus autem reliquis punctis iſta tangens $S P = q$ minor erit quam obliquitas b.

§. 32. Praeterea vero etiam ipſam curuaturam noſtrae curuae E S F in ſingulis punctis S ſatis concinne exprimere licet. Si enim radium oſculi in puncto S deſignemus littera r, conſtat, eum ex perpendiculo in tangentem $A P = p$ ita exprimi, vt ſit $r = \frac{v\,\partial\,v}{\partial\,p}$. Cum igitur ſit

$$v\,\partial\,v = -b\,c\,\partial\,\Phi \text{ ſin. } \Phi \text{ et}$$

$$p\,\partial\,p = -b\,\partial\,\Phi \text{ ſin. } \Phi\,(c + b \text{ cos. } \Phi), \text{ ideoque}$$

$$\partial\,p = -\frac{b\,\partial\,\Phi \text{ ſin. } \Phi\,(c + b \text{ cos. } \Phi)}{p},$$

his valoribus ſubſtitutis reperitur radius oſculi $r = \frac{c\,p}{c + b \cos. \Phi}$, vnde ſequitur in ipſo puncto E, vbi $\Phi = 0$, radium oſculi fore

$$r = \frac{c\,p}{c + b} = \frac{c\sqrt{a\,a + (c + b)^2}}{c + b};$$

at

at vero in altero termino F, vbi $\Phi = \pi$, radius oſculi erit

$$r = \frac{cp}{c-b} = \frac{c\sqrt{aa+(c-b)^2}}{c-b}.$$

Vnde patet, ſi fuerit $b > c$, hoc eſt iis caſibus, quibus altitudo AB extra baſin cadit, tum radium oſculi in F fore negatiuum, ideoque curuam in hoc loco conuexitatem verſus A obvertere; contra autem, quamdiu fuerit $b < c$, tum totam curvam vbique verſus A fore concauam.

§. 33. Quodſi porro longitudinem curuae ES ponamus $= s$ ita vt ſit $s = c\Phi$, notum eſt formulam integralem $\int \frac{\partial s}{r}$ exprimere amplitudinem arcus curuae ES, quae ſi deſignetur littera ψ, erit $\partial\psi = \frac{\partial s}{r}$, quamobrem ſubſtitutis valoribus pro ∂s et r inuentis habebimus

$$\partial\psi = \frac{\partial\Phi(c+b\cos\Phi)}{\sqrt{aa+(c+b\cos\Phi)^2}},$$

cuius formulae integratio, etiamſi pariter expediri nequeat, tamen multo ſimplicior eſt cenſenda illa, qua $\partial\omega$ exprimebatur. Inuento autem hoc angulo ψ, ex eo quoque ipſum illum angulum ω definire licebit. Ducta enim ex S ad rectam AE perpendiculari SX, angulus ESX ipſam curuae amplitudinem metitur; quare cum etiam angulus ASP $= \theta$ ſit cognitus, erit angulus ASX $= 180 - \theta - \psi$, qui cum etiam ſit $= 90° - \omega$, reperietur ipſe angulus $\omega = \theta + \psi - 90°$, ſicque integratione formulae illius difficillimae pro $\partial\omega$ inuentae ſuperſedere poterimus.

§. 34. Ex his iam, quae hactenus ſunt allata, ipſa curua ESF haud difficulter in plano deſcribi poterit, quae ſi in plures partes diuidatur, ſingularum partium areae facili negotio practice menſurari poterunt, quae in vnam ſummam collectae dabunt ſuperficiem coni ſcaleni propoſiti. Caeterum hic

ſilentio

silentio non est praetereundum, quoniam haec figura per explicationem chartae tam facile exhiberi potest, hinc eximium exemplum curuae maxime transcendentis obtineri, cuius nihilominus descriptio facillime expediri queat.

Additamentum ad §. 21.

Quodsi formulas in §. 21. traditas euoluamus, atque simili modo, vt ibi coepimus, summas terminorum quintorum, sextorum et sequentium actu definiamus, seriem haud inelegantem pro superficie coni scaleni exhibere poterimus. Quodsi enim breuitatis gratia ponamus $c = ax$ et $\sqrt{(1+xx)} = u$, tota coni scaleni superficies erit $= \pi aaxu \cdot V$, denotante V summam sequentis seriei:

$$V = 1 + \frac{1}{2^2}\,\frac{bb}{1.aa}\cdot\frac{1}{u^4} - \frac{1.3}{2^2.4^2}\cdot\frac{b^4}{3.a^4}\cdot\left(\frac{1.3}{u^6} - \frac{3.5\,xx}{u^8}\right)$$
$$+ \frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{b^6}{5.a^6}\left(\frac{1.3.5}{u^8} - 2.\frac{3.5.7.xx}{u^{10}} + \frac{5.\ldots.9.x^4}{u^{12}}\right)$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{b^8}{7.a^8}\left(\frac{1.3.5.7}{u^{10}} - 3.\frac{3.5.7.9.xx}{u^{12}} + \frac{3.5.7.9.11.x^4}{u^{14}} - \frac{7.9.11.13.x^6}{u^{16}}\right)$$
$$+ \frac{1.3.5.\ldots.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}\,\frac{b^{10}}{9.a^{10}}\left(\frac{1.3.5.7.9}{u^{12}} - 4.\frac{3.\ldots.11.xx}{u^{14}} + 6.\frac{5.\ldots.13.x^4}{u^{16}}\right.$$
$$\text{etc.} \qquad \left. - 4.\frac{7.\ldots.15.x^6}{u^{18}} + \frac{9.\ldots.17.x^8}{u^{20}}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Euidens autem est hanc seriem iis tantum casibus vsum praestare, quibus quantitas bb multo minor est quam formula $aa + cc$, quando autem propemodum est aequalis, vel adeo maior, tum necessario confugiendum erit ad descriptionem illam practicam, quam supra expossuimus.

DE PROPRIETATIBVS QVIBVSDAM ELLIPSEOS IN SVPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTAE.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 25 *Octobris* 1787.

§. 1.

Pauca tantum exſtant ſpecimina illius doctrinae Sphaericorum partis, quae de figurarum linearumque curuarum in ſuperficie ſphaerae deſcriptarum proprietatibus agit. Super cetera in hoc genere eminent quae celeberrimus quondam Academicus noſter *Lexell*, circa Epicycloïdes in ſuperficie ſphaerae deſcriptas (*V. Acta Acad. Tom. III. P. I.*); circa lineam curuam, in qua collocantur vertices omnium triangulorum ſphaericorum eiusdem areae et baſis (*V. Acta Acad. T. V. P. I.*); circa circulorum in ſphaerae ſuperficie deſcriptorum proprietates planis analogas (*V. Acta Acad. T. VI. P. I.*); etc. exhibuit, inde occaſionem arreptus Geometrarum attentionem ad nouam Geometriae partem ex huiusmodi disquiſitionibus forte aliquando oriundam dirigendi. His viri beate defuncti ſpeciminibus praeclaris aliquot obſeruationes circa proprietates Ellipſis in ſuperficie ſphaerica deſcriptas, quae ſe mihi

mihi nuper obtulere, adiicere conſtitui, cum a nemine adhuc, quantum quidem memini, ſint obſeruatae.

§. 2. In hanc autem Ellipſis ſpeciem inquirendi anſam mihi praebuit inueſtigatio Maximorum quorundam ſphaericorum cum Academia non ita pridam communicata, praeſertim problema de triangulo ſuper data baſi in ſuperficie ſphaerica conſtruendo, cuius amborum laterum ſumma ſit omnium minima (*V. Noua Acta Tom. II.*). Cum enim, huius problematis ſolutione abſoluta, etiam quaeſtionem illi ſimilem aggrediebar: ſuper data baſi triangula ſphaerica conſtruere ita comparata, vt ſumma reliquorum laterum ſemper ſit eiusdem magnitudinis, ſtatim ſe obferebant proprietates quaedam Ellipſi planae analogae, vt et alia vlteriore indagatione digna, vnde hoc argumentum ſeorſim tractandum potius quam ad calcem diſſertationis modo memoratae annectendum exiſtimaui.

§. 3. Si in ſuperficie ſphaerica filum datae longitudinis in duobus punctis figatur ſtilique ope extendatur, curvam, quae ſtilum promouendo, ſuper ſphaera deſcribitur, ob hunc ipſum deſcribendi modum delineationi Ellipſis planae analogum *Ellipſin ſphaericam* vocare licebit, cuius curuae naturam et proprietates perſcrutari in animum induxi. Hunc in finem pono longitudinem fili $= 2c$ et amborum punctorum datorum A et B diſtantiam, ſiue arcum circuli maximi $AB = 2a$. Biſecetur autem arcus iſte AB in C, vt ſit $CA = CB = a$; tum vero ſit MN arcus curuae deſcriptae, in eoque Y punctum quodcunque, vnde ad puncta A et B ducti concipiantur arcus circulorum maximorum YA et YB, quae poſitionem fili pro loco ſtili Y referant, demiſſoque perpendiculo in baſin YX, vocentur coordinatae ſphaericae $CX = x$, $XY = y$, ita vt ſit $AX = a + x$ et $BX = a - x$. Porro Tab. II. Fig. 1.

 voce-

vocetur arcus $AY = c + v$ et arcus $BY = c - v$, hocque enim modo ſumma arcuum $AY + BY = 2c$ aequetur longitudini fili, vti requiritur.

§. 4. His ſtabilitis conſideremus bina triangula ſphaerica rectangula AXY et BXY, ex quibus habebimus

$$\text{cof. } AY = \text{cof. } AX \cdot \text{cof. } XY,$$
$$\text{cof. } BY = \text{cof. } BX \cdot \text{cof. } XY,$$

ſiue adhibitis denominationibus modo ſtabilitis:

$$\text{cof. } (c + v) = \text{cof. } (a + x) \text{ cof. } y;$$
$$\text{cof. } (c - v) = \text{cof. } (a - x) \text{ cof. } y;$$

ſiue euoluendo:

$$\text{cof. } c \text{ cof. } v - \text{ſin. } c \text{ ſin. } v = \text{cof. } y \text{ cof. } a \text{ cof. } x - \text{cof. } y \text{ ſin. } a \text{ ſin. } x;$$
$$\text{cof. } c \text{ cof. } v + \text{ſin. } c \text{ ſin. } v = \text{cof. } y \text{ cof. } a \text{ cof. } x + \text{cof. } y \text{ ſin. } a \text{ ſin. } x.$$

Harum aequationum ſumma praebet

$$\text{cof. } c \text{ cof. } v = \text{cof. } y \text{ cof. } a \text{ cof. } x;$$

differentia vero dat

$$\text{ſin. } c \text{ ſin. } v = \text{cof. } y \text{ ſin. } a \text{ ſin. } x,$$

ex quibus aequationem pro curua confici oportet.

§. 5. Multiplicetur prior harum aequationum per ſin. c, altera vero per cof. c, vnde orientur ſequentes aequationes:

$$\text{ſin. } c \text{ cof. } c \text{ cof. } v = \text{ſin. } c \text{ cof. } a \text{ cof. } x \text{ cof. } y;$$
$$\text{ſin. } c \text{ cof. } c \text{ cof. } v = \text{cof. } c \text{ ſin. } a \text{ ſin. } x \text{ cof. } y.$$

Sumatur ſumma quadratorum, quo quantitas v eliminetur, eritque

$$\text{ſin. } c^2 \text{ cof. } c^2 = \text{cof. } y^2 (\text{ſin. } c^2 \text{ cof. } a^2 \text{ cof. } x^2 + \text{cof. } c^2 \text{ ſin. } a^2 \text{ ſin. } x^2),$$

quae aequatio ob $\text{ſin. } x^2 = 1 - \text{cof. } x^2$; $\text{ſin. } a^2 = 1 - \text{cof. } a^2$ et

et $\sin. c^2 = 1 - \cos. c^2$, etiam hoc modo repraesentari potest:

$$\sin. c^2 \cos. c^2 = \cos. y^2 [\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)],$$

vnde colligitur

$$\cos. y = \frac{\sin. c \cos. c}{\sqrt{[\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)]}}.$$

§. 6. En igitur aequationem nacti sumus relationem coordinatarum x et y complectentem, quam sequentem in modum commodius repraesentare licebit. Ex aequatione modo inuenta habebitur:

$$\sin. y = \sqrt{\frac{\cos. c^2 (\sin. a^2 - \sin. c^2) + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)}{\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)}}.$$

Est vero $\sin. a^2 - \sin. c = -(\cos. a^2 - \cos. c^2)$, ergo

$$\sin. y = \sqrt{\frac{(\cos. a^2 - \cos. c^2)(\cos. x^2 - \cos. c^2)}{\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)}};$$

vnde porro haec expressio satis commoda eruitur:

$$\text{tang.} y = \frac{\sqrt{(\cos. a^2 - \cos. c^2)(\cos. x^2 - \cos. c^2)}}{\sin. c \cos. c},$$

qua igitur aequatione, (quae etiam ita repraesentari potest:

$$\text{tang.} y = \frac{\sqrt{(\sin. c^2 - \sin. a^2)(\sin. c^2 - \sin. x^2)}}{\sin. c \cos. c}),$$

natura curuae exprimitur.

§. 7. Considerem us casum quo fili longitudo aequatur semicirculo sphaerae maximo, ita vt sit $2c = 180°$, ideoque $c = 90°$, quo casu igitur applicata y, ob $\text{tang.} y = \infty$, fit quadrans, ita vt punctum curuae Y caderet in polum circuli maximi, cuius arcus AB est portio, quantacunque fuerit abscissa $CX = x$, quo igitur casu curua vnico puncto constare videtur, cum tamen nihil obstet, quominus stilus promoueatur. Verum hoc dubium sequenti modo facile diluetur. Retento valore $c = 90°$, et sumtis in arcu circuli maximi AB, vtrin-

que prolongato, arcubus $CE = CF = 90°$, quaeramus applicatam in punctis C, E, F, atque ſtatim patet, poſito $x = 0$, pro applicata in C fore

$$\text{tang.}\, y = \frac{\text{cof. } a \text{ ſin. } c}{\text{ſin. } c \text{ cof. } c} = \frac{\text{cof. } a}{\text{cof. } c} = \infty,$$

ideoque $y = 90°$, ita vt pro puncto C applicata ſit quadrans et Y in polo circuli maximi EF reperiatur. Tum vero ponatur $x = \pm c$, eritque pro applicata in punctis E et F, tang. $y = \frac{0}{0}$, ideoque indefinita. Hoc ſcilicet caſu curua deſcripta erit circulus maximus baſi AB, cuius polus incidit in ipſum punctum Y, in E et F normaliter inſiſtens. Producto enim arcu AB vtrinque in E et F vsque, ita ſcilicet vt $CE = CF = 90°$, circulus maximus EYF, ipſi ECF normaliter inſiſtens, exhibebit hanc Ellipſin ſphaericam. Sumto enim puncto X in ipſo puncto E vel F applicata indefinita omnia dabit puncta in hoc circulo maximo, et in puncto C vtique erit $CY = 90°$.

Tab. II. Fig. 2.

§. 8. Hinc ergo deducimus ſequentem proprietatem maxime memorabilem. Si in ſuperficiei ſphaericae duobus punctis quibuscunque A et B, minus quam 180° a ſe inuicem diſtantibus, fili ſemicirculo maximo aequalis termini figantur & ope ſtili extendantur, ſtilum promouendo deſcribitur circulus maximus, cuius polus in medio arcus AB, hoc eſt in C erit ſitus, cuius rei veritas cuilibet, ſuper globo in ſuos Meridianos et Parallelos diuiſo periculum facienti, mox in oculos incurret.

§. 9. Ex aequatione generali pro natura curuae inventa:

$$\text{tang.}\, y = \pm \frac{\sqrt{(\text{cof. } a^2 - \text{cof. } c^2)(\text{cof. } x^2 - \text{cof. } c^2)}}{\text{ſin. } c \text{ cof. } c},$$

Fig. 3. liquet, applicatam y euaneſcere caſibus $x = \pm c$. Vnde patet, ſi circa punctum C vtrinque capiantur arcus $CE = CF = c$, curuam per haec duo puncta E et F tranſire, ſicque haec puncta

puncta erunt vertices Ellipſis; et cum cuilibet abſciſſae, ob ſignum radicale ambiguum, duae reſpondeant applicatae, poſitiua ſcilicet et negatiua, arcus E C F referet axem Ellipſeos ſphaericae transuerſum, cuius longitudo E F $=$ 2 c longitudini fili aequalis, et in quo punctum C centrum, puncta A et B vero focos Ellipſis exhibent, quorum diſtantia A B $=$ 2 a. Porro ſi ad quoduis punctum curuae Y ducantur arcus A Y et B Y, eorum ſumma ſemper aequalis eſt axi transuerſo E F.

§. 10. Quaeramus etiam ſemiaxem coniugatum noſtrae Ellipſis. Statuamus hunc in finem abſciſſam C X $= x =$ 0, fietque

$$\text{tang. } y = \frac{\sqrt{(\text{cof. } a^2 - \text{cof. } c^2)}}{\text{cof. } c} = \frac{\sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſiu. } a^2)}}{\text{cof. } c},$$

ita vt pro puncti C applicata C D ſit

$$\text{tang. C D} = \frac{\sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſin. } a^2)}}{\text{cof. } c};$$

vnde ſi ſemiaxis coniugatus vocetur C D $= g$, erit

$$\text{tang. } g = \frac{\sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſin. } a^2)}}{\text{cof. } c},$$

exiſtente pro ſemiaxe transuerſo:

$$\text{tang. C E} = \text{tang. C F} = \text{tang. } c = \frac{\text{ſin. } c}{\text{cof. } c},$$

qui valor, ob $\sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſin. } a^2)} < \text{ſin. } c$, certe maior eſt praecedente. Quodſi porro deſideremus aequationem pro applicata abſciſſam vna cum ſemiaxe maiore et minore complectentem, vti pro Ellipſi plana quaeri ſolet, ob $\frac{\sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſin. } a^2)}}{\text{cof. } c} = \text{tang. } g$, habebimus:

$$\text{tang. } y = \frac{\text{tang. } g}{\text{ſin. } c} \sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſin. } x^2)},$$

quam aequationem inter et illam, qua natura Ellipſis planae exprimitur, manifeſtus nexus ſubſiſtit. Denique ex ipſa curuae deſcriptione ſequitur, ambos arcus A Y et B Y aequaliter ad curuam eſſe inclinatos.

§. 11.

§. 11. Quo autem naturam huius curuae accuratius perſcrutemur, in eius proiectionem ſuper plano quopiam factam inquiramus. Hoc autem planum ita accipiamus vt ſphaeram in ipſo Ellipſeos centro C tangat, ita vt, ſi Ellipſis fuerit quam minima, ea cum proiectione ipſa conueniat. Concipiamus igitur ſphaeram, vti in Aſtronomia fieri ſolet, referatque
Tab. II. Fig. 4. circulus H C K Meridianum, circulus vero H O K Horizontem, atque Ellipſeos ſphaericae centrum ſitum ſit in ipſo Zenith, ſeu puncto C, a quo foci Ellipſeos vtrinque diſtent interuallo $C A = C B = a$, longitudo vero fili ſit $= 2c$, ita vt, ſumtis arcubus $C E = C F = c$, puncta E et F ſint vertices Ellipſis, cuius ſi punctum quodcunque Y conſideretur, ad id ex centro C ducatur arcus $C Y = z$, vocatoque angulo $A C Y = \Phi$ ex his duobus elementis z et Φ binae coordinatae ſupra aſſumtae $C X = x$, $X Y = y$ ita determinabuntur, vt ſit $\text{ſin.}\, y = \text{ſin.}\, z\, \text{ſin.}\, \Phi$ et $\text{tang.}\, x = \text{tang.}\, z\, \text{coſ.}\, \Phi$

§. 12. Quoniam autem proiectio quaeſita fieri debet in planum quod ſphaeram in ipſo puncto C tangat, hoc planum erit parallelum ipſi Horizonti H O K; vnde quaeſito pariter ſatisfaciemus, ſi noſtram Ellipſin ſphaericam in Horizontem H O K proiiciamus. Hoc igitur planum in figura quinta ſeorſim repraeſentemus; vbi linea recta $b c k$ eſt proiectio Meridiani H C K et diametro ſphaerae aequalis, ita vt punctum
Fig. 5 & 6. medium c ipſum centrum ſphaerae, atque adeo proiectionem centri Ellipſeos C referat, quam proiectionem figura ſexta clarius ob oculos ponit.

§. 13. Statuatur igitur $c b = c k = 2$, capianturque in recta $b k$ puncta a et b, focis A et B reſpondentia, eruntque interualla $c a$, $c b$ ſinus arcuum C A et C B, quae ſi vocemus $c a = c b = A$, habebimus $\text{ſin.}\, a = A$. Simili modo ſint puncta

puncta e et f proiectiones verticum E et F, eruntque intervalla ce, cf sinus arcuum CE, CF, positoque $ce = cf = C$, erit sin. $c = C$. Incidat porro punctum X in x et Y in y, voceturque interuallum $cy = Z$, atque euidens est fore sin. $z = Z$. Denique manifestum est in proiectione angulum acy aequalem esse angulo ACY, ideoque $acy = \Phi$. Vnde si in proiectione vocentur coordinatae $cx = X$ et $xy = Y$, erit Tab. II. Fig. 6. Fig. 5.

$$cx = X = cy \text{ cos. } \Phi = Z \text{ cos. } \Phi \text{ et}$$
$$xy = Y = cy \text{ sin. } \Phi = Z \text{ sin. } \Phi,$$

hincque $Z^2 = X^2 + Y^2$. Totum igitur negotium eo redit, vt elementa ante introducta x et y reuocentur ad has coordinatas X et Y.

§. 14. Quoniam igitur primo inuenimus sin. $y = \text{sin. } z \times \text{sin. } \Phi$ (§. 11.), erit sin. $y = Z \text{ sin. } \Phi = Y$, ideoque cos. $y = \sqrt{(1-YY)}$, atque tang. $y = \frac{Y}{\sqrt{(1-YY)}}$. Deinde vidimus esse (§. 11.)

$$\text{tang. } x = \text{tang. } z \text{ cos. } \Phi = \frac{\text{sin. } z \text{ cos. } \Phi}{\text{cos. } z} = \frac{z \text{ cos. } \Phi}{\sqrt{(1-zz)}},$$

sive tang. $x = \frac{X}{\sqrt{(1-zz)}}$, vnde fit sin. $x = \frac{X}{\sqrt{(1+XX-zz)}}$, quae expressio ob $ZZ = XX + YY$, abit in hanc:

$$\text{sin. } x = \frac{X}{\sqrt{(1-YY)}}.$$

§. 15. Substituamus nunc in aequatione supra inuenta:

$$\text{tang. } y = \frac{\sqrt{(\text{sin. } c^2 - \text{sin. } a^2)}\,(\text{sin. } c^2 - \text{sin. } x^2)}{\text{sin. } c \text{ cos. } c},$$

(§. 6.) loco tang. y et sin. x, valores modo erutos, atque aequatio, loco sin. c et sin. a scribendo C et A, hanc induet formam:

$$\frac{Y}{\sqrt{(1-YY)}} = \frac{\sqrt{(CC-AA)}\cdot(CC-\frac{XX}{1-YY})}{C\sqrt{(1-CC)}},$$

siue sumtis vtrinque quadratis

$$\frac{YY}{1-YY} = \frac{CC-AA}{CC(1-CC)}\left(CC-\frac{XX}{1-YY}\right),$$

quae multiplicata per $CC(1-CC)(1-YY)$ abit in hanc:

$$CC(1-CC)YY = (CC-AA)(CC-CCYY-XX).$$

Addamus vtrinque $(CC-AA)CCYY$, vt litteram Y ad dextram partem tollamus, quo facto aequatio nostra ita se habet:

$$(1-AA)CCYY = (CC-AA)(CC-XX),$$

ex qua colligitur:

$$YY = \frac{(CC-AA)(CC-XX)}{CC(1-AA)}, \text{ ideoque}$$

$$Y = \frac{\sqrt{(CC-AA)(CC-XX)}}{C\sqrt{(1-AA)}},$$

vnde statim intelligitur proiectionem quaesitam esse Ellipsin.

Tab. II. Fig. 5. §. 16. Quo indolem huius curuae accuratius cognoscere queamus, consideremus attentius hanc aequationem, ac statim euidens est applicatam Y euanescere, sumto $X = \pm C$. Quare cum sit $ce = cf = C$, manifestum est puncta e et f fore vertices Ellipseos planae, et rectam ef eius axem transversum. Ponamus porro $X = 0$, quo casu applicata Y nobis dabit semiaxem coniugatum cd quem si vocemus $cd = G$, erit $G = \sqrt{\frac{CC-AA}{1-AA}}$. Quod autem focos attinet, probe notandum est eos non incidere in puncta proiectionis focorum Ellipseos sphaericae a et b, ipsis A et B respondentia. Ponamus enim focos Ellipsis planae reperiri in α et β, atque necesse est vt sit $c\alpha = c\beta = \sqrt{(CC-GG)}$. Modo autem inuenimus $GG = \frac{CC-AA}{1-AA}$, vnde fit $c\alpha = c\beta = A\sqrt{\frac{1-CC}{1-AA}}$. Cum igitur sit $ca = cb = A$, manifestum est fore $(c\alpha = c\beta) < (ca = cb)$, propterea quod $C > A$, ideoque $\frac{1-CC}{1-AA} < 1$. Sicque distantia focorum in proiectione semper minor est quam in

in Ellipſi ſphaerica. Ceterum aequatio pro hac Ellipſi plana, introducto ſemiaxe minore $G = \sqrt{\frac{CC-AA}{1-AA}}$, erit

$$Y = \frac{c}{C}\sqrt{(CC - XX)},$$

cum pro Ellipſi ſphaerica fuiſſet

$$\text{tang. } y = \frac{\text{tang. } g}{\text{ſin. } c}\sqrt{(\text{ſin. } c^2 - \text{ſin. } x^2)}.$$

§. 17. Euoluatur caſus vbi $C = 1$, quod euenit ſi in Ellipſi ſphaerica fili longitudo ſemicirculo maximo fuerit aequalis, quo caſu diſtantia focorum $\alpha\beta$ penitus euaneſcit et aequatio pro proiectione fit $Y = \sqrt{(1 - XX)}$, quae ergo erit circulus radio $ck = cb = 1$ deſcriptus. Hoc ſcilicet caſu, vti iam ſupra §. 8. obſeruauimus, Ellipſis ſphaerica fit circulus maximus in Horizontem incidens, ita vt eius proiectio ſit ipſe Horizon, ideoque etiam circulus, cuius radius $cb = ck = \text{ſin. } c = 1$, quo ipſo huius caſus ſolutio ſupra §. 7. tradita magis confirmatur.

ANNOTATIONES
AD THEOREMA XVI. LIB. V.
PAPPI ALEXANDRINI.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 13 *Decembr.* 1787.

§. 1.

Quinque, qui ad nos peruenerunt, *Pappi Alexandrini* libri tot elegantes ingenioſasque continent propoſitiones, vt merito in Geometris deſiderium excitent trium, quibus temporis iniuria nos priuauit, librorum. Eo magis autem ipſa, quae ſuperſunt, attentione ſunt digna, quod inter priſcos Geometras maxime *Pappus* eiusmodi inſtituit disquiſitiones, quae fines Geometriae Elementaris transſcendere videntur, atque hodie poſt inuentum calculum infinitorum nonniſi Analyſeos ope abſolui ſolent, quae ideo optime oſtendunt, quae inter ſyntheticam analyticamue methodum intercedit, differentiam. Sunt equidem nonnullae inter eius propoſitiones, vbi Analyſis ad calculum ducit tam prolixum, vt Syntheſis merito videatur praeferenda: plurimae autem eius ſunt indolis, vt ingenioſa *Pappi* demonſtratio Geometrica, licet per longas ambages procedens, tamen pro quocunque caſu ſpeciali aliter ſit formanda; inprimis autem ipſa propoſitio adeo eſt determinata, vt Analyſis idem obiectum via longe breuiore methodoque generaliſſima poſſit abſoluere. Opus itaque mihi videtur haud inutile,

utile, analytice conſiderare obiectum, quod geometrice tractavit *Pappus*.

§. 2. Theorema, in quod hic commentaturus ſum, *Pappi* verbis ſic exprimitur:

Circuli portionum, quae aequalem circumferentiam habent, maxima eſt ſemicirculus.

Quodſi itaque (Fig. 7.) A F B ſit ſemicirculus, et appelletur radius C F $= r$, arcus D F $= s$, angulus D C F $= \Phi$, patet, s eſſe conſtantem, r vero et Φ variabiles. Quaeruntur itaque caſus, vbi area ſegmenti D F E G $= S$ fit Maximum. Quem in finem aequatione opus eſt inter S et s. Eſt autem area ſectoris D F E C $= s\,r$, et trianguli Tab. II.

$$D\,C\,E\,G = C\,G\,.\,D\,G = r\,r \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi.$$

Vnde fiet $S = s\,r - r\,r$ ſin. Φ coſ. Φ; ex qua aequatione valor anguli Φ pro caſu Maximi elici debet. Quia vero $\Phi = \frac{s}{r}$, erit $\partial\Phi = -\frac{s\,\partial r}{r\,r}$, ideoque

$$\frac{\partial s}{\partial r} = s - 2r \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi + s \text{ coſ. } \Phi^2 - s \text{ ſin. } \Phi^2$$
$$= 2 \text{ coſ. } \Phi\,(s \text{ coſ. } \Phi - r \text{ ſin. } \Phi).$$

Quae expreſſio duplici caſu euaneſcit. Erit igitur S Maximum vel Minimum, 1.) ſi coſ. $\Phi = 0$, 2.) ſi s coſ. $\Phi = r$ ſin. Φ, ſeu tang. $\Phi = \frac{s}{r} = \Phi$. Quodſi ſegmentum integram circuli peripheriam non excedere ſtatuatur, vt nunquam $\Phi > \pi$; prior radix dat $\Phi = 90°$, ſeu arcum D F E ſemicirculo aequalem; poſterior prodit angulum D C E infinite paruum, adeoque radium r infinitum, quia quantitas $s = \Phi r$ ſupponitur finita.

Inquiramus iam, vtra radix praebeat Maximum, vtra Minimum. Quem in finem $\frac{\partial s}{\partial r}$ iterum differentiari debet, fietque $\frac{\partial\partial s}{2\partial r^2} = \frac{2s^2}{r^2}$ fin. Φ cof. Φ — fin. Φ cof. Φ + $\frac{s}{r}$ cof. Φ^2 — $\frac{s}{r}$ fin. Φ^2, quod pro priore radice dat:

$$\frac{\partial\partial s}{2\partial r^2} = -\Phi \text{ fin. } \Phi^2 = -\tfrac{1}{2}\pi;$$

pro fecunda:

$$\frac{\partial\partial s}{2\partial r^2} = 2 \text{ tang. } \Phi^2 \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi - \text{fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi + \text{tang. } \Phi \text{ cof. } \Phi^2$$
$$- \text{tang. } \Phi \text{ fin. } \Phi^2 = 2 \text{ tang. } \Phi \text{ fin. } \Phi^2 - \text{tang. } \Phi \text{ fin. } \Phi^2$$
$$= +\Phi \text{ fin. } \Phi^2.$$

Ergo radix poſterior Minimum praebet, prior Maximum. Et hunc poſtremum quidem caſum ſolum *Pappus* conſiderauit, eiusque veritatem plurimis ambagibus demonſtrauit, primo ſi $\Phi < 90°$, deinde ſi $\Phi > 90°$.

§. 3. Operae pretium mihi videtur, rem adhuc ſollertius ac modo generaliore conſiderare. Prior radix, cof. $\Phi = 0$, dat non ſolum $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, ſed etiam $\Phi = \frac{3}{2}\pi$, $\Phi = \frac{5}{2}\pi$, etc. ſeu totum arcum D F E $= \pi$, 3π, 5π, 7π, etc. Quotiescunque igitur area eſt ſemicirculus, aut plures circulos integros cum ſemicirculo continet, toties ea fit Maximum. Sed omnes iſtae areae minores ſunt ea, quae reſultat caſu $\Phi = \frac{1}{2}\pi$. Sint enim generatim bini anguli Φ et Ψ ad radios r et ϱ pertinentes, et quidem $\Phi = \frac{m}{2}\pi$, $\Psi = \frac{n}{2}\pi$, et $n > m$. Erit nunc $s = \Phi r = \Psi\varrho$, ideoque $mr = n\varrho$, et $\varrho < r$. Binae autem areae erunt Φrr et $\Psi\varrho\varrho$, h. e. in ratione $mrr : n\varrho\varrho = r : \varrho$, quia $mr = n\varrho$. Vnde ob $\varrho < r$ patet, areas ſemper euadere minores, quo plures circulos integros complectuntur. Vnde ſequitur, caſum, $\Phi = \frac{1}{2}\pi$ dare Maximum abſolutum ſeu Maximum inter Maxima, vt itaque propoſitio *Pappi* ſenſu ſtrictiſſimo vera ſit.

§. 4.

§. 4. Quotiescunque autem est $\Phi = \text{tang.}\,\Phi$, toties area fit Minimum. Hoc non solum si Φ infinite paruum, sed pro innumeris aliis anguli Φ valoribus euenit. Si $\Phi > 90°$, tangentes inde a $(-\infty)$ vsque ad o decrescunt, dum arcus crescit. Ergo semel esse debet in secundo quadrante, $\Phi = -\text{tang.}\,\Phi$. Quoniam autem tangentes negatiui haud praebent Minimum, iste casus huc non pertinet. Facile vero patet, in tertio quadrante fieri oportere $\Phi = \text{tang.}\,\Phi$, quia, crescente Φ, tang. Φ a o vsque ad ∞ crescit. Idem de quinto, septimo, nono et quolibet quadrante numeri imparis euidens est. Sic e. gr. inuenitur in partibus radii

	arcus	257°	27′	12″	13‴	= 4,49340934
et tang. eiusdem arcus	= tang.	77	27	12	13	= 4,49340924
	arcus	442	37	27	32	= 7,72525161
	et tang.	82	37	27	32	= 7,72524990
	arcus	624	45	36	30	= 10,90412143
	et tang.	84	45	36	30	= 10,90412394

etc.

Ergo generaliter area fit Minimum, si $\Phi > o$, $< \frac{1}{2}\pi$, si $\Phi > \pi$, $< \frac{3}{2}\pi$, si $\Phi > 2\pi$, $< \frac{5}{2}\pi$, etc. Maximum autem, si $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, si $\Phi = \frac{3}{2}\pi$, si $\Phi = \frac{5}{2}\pi$, etc. vt itaque Maxima et Minima alternent, quemadmodum esse debebat. Ceterum patet, etiam hic primum Minimum esse absolutum Minimum, quia casu $\Phi = o$, area fit $= s\,r - r\,r$ sin. Φ cos. $\Phi = r\,r\,(\Phi - \Phi \text{ cos.}\,\Phi)$ $= r\,r\,(\Phi - \Phi + \frac{1}{2}\Phi^3) = \frac{1}{2}\,r\,r\,\Phi^3 = o$, quia exponens ipsius Φ maior est exponente ipsius r. Hoc autem casu excepto omnia haec Minima eo erunt minora, quo maior Φ, adeoque si Φ in tertio quadrante, area erit Maximum quoddam inter haec Minima. Quia enim semper $\Phi = m\pi + \psi$, vbi $\psi < 90°$, erit semper tang. Φ = tang. ψ; et quoniam Φ semper crescit, crescere quoque oportet tang. $\Phi = \Phi =$ tang. ψ, vnde et ψ

semper

ſemper creſcit creſcente Φ. Sic in exemplis ſupra computatis valores ipſius ψ hoc ordine ſequebantur: $\psi = 77^\circ\,27' \ldots$, $\psi = 82^\circ\,37' \ldots\ldots$, $\psi = 84^\circ\,45' \ldots\ldots$ His praeſuppoſitis eſt, caſu $\Phi = \text{tang. } \Phi$, area

$$S = s\,r - r\,r \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi = r\,r\,(\Phi - \text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi)$$
$$= r\,r\,(\Phi - \text{tang. } \Phi \text{ coſ. } \Phi^2) = r\,r\,\Phi \text{ ſin. } \Phi^2$$
$$= s\,r \text{ ſin. } \Phi^2 = \frac{s\,s \text{ ſin. } \Phi^2}{\Phi} = \frac{s\,s \text{ ſin. } \Phi^2}{\text{tang. } \Phi} = s\,s \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi$$
$$= \tfrac{1}{2}\,s\,s \text{ ſin. } 2\,\Phi,$$

vbi ob s conſtantem, areae cum ſin. $2\,\Phi$ creſcunt. In aequatione vero: $\Phi = m\,\pi + \psi$, ſemper eſt $\psi < 90^\circ$, et $\psi > 45^\circ$, quia, vt vidimus, ſemper creſcit, et primo caſu iam erat $\psi = 77^\circ\,27' \ldots$ Ergo $2\,\psi$ ſemper $> 90^\circ$ et $2\,\psi < 180^\circ$; verum $2\,\Phi = 2\,m\,\pi + 2\,\psi$, vnde ſin. $2\,\Phi =$ ſin. $2\,\psi$, creſcente Φ ſemper decreſcit, quia ψ cum Φ ſimul creſcit. Adeoque et area decreſcit.

§. 5. Vlterius hanc disquiſitionem extendere mihi liceat et ad alias ſuperficies vel corpora applicare. Sit itaque primum A F B Hemiſphaerium, cuius radius $C\,F = r$. D E repraeſentet baſin ſegmenti ſphaerici D F E G, cuius altitudo $F\,G = a$, ſuperficies ſphaerica $D\,F\,E = s$, corpus $D\,F\,E\,G = S$. Si nunc s ſtatuatur conſtans, et quaerantur Maxima et Minima corporis S: r et a ceu variabiles ſunt conſiderandae, quaeriturque ratio $\frac{a}{r}$, quae aequalis eſt ſinui verſo anguli D C F ſeu diſtantiae ſegmenti a polo. S hic vt functio ipſius s conſiderari debet, quod ita optime ſuccedit: Eſt ſegmentum conoidale

$$D\,C\,E\,F = X = \tfrac{1}{3}\,r\,s, \text{ conus } D\,C\,E\,G = Y = \tfrac{1}{3}\,\pi\,D\,G^2.$$
$$C\,G = \tfrac{1}{3}\,\pi\,a\,(2\,r - a)\,(r - a) = \tfrac{1}{3}\,\pi\,a\,(2\,r^2 - 3\,a\,r + a^2)$$

ideoque

$$S = X - Y = \tfrac{1}{3}\,(r\,s - 2\,\pi\,a\,r^2 + 3\,\pi\,a^2\,r - \pi\,a^3).$$

Eſt

Eſt autem $s = 2\pi ar$, vnde fit

$$S = a(\pi ar - \tfrac{1}{3}\pi a^2) = a(\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{3}\pi a^2).$$

Habemus itaque $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2}s - \pi a^2$, quod poſitum $= 0$ dat, $a^2 = \frac{s}{2\pi} = ar$, ſeu 1.) $a = r$, et 2.) $a = 0$. Prior valor $a = r$ dat $\frac{\partial\partial S}{\partial a^2} = -2\pi r$: ergo S fit Maximum, ſi D C F $= 90°$ ſeu ſegmentum D F E hemiſphaerium. Alter valor $a = 0$ neque Maximum neque Minimum dat, quia hocce caſu

$$\frac{\partial\partial S}{\partial a^2} = -2\pi a = 0, \text{ at } \frac{\partial^3 S}{\partial a^3} = +2\pi,$$

non euaneſcit. Ceterum patet, eodem caſu fieri $S = \frac{1}{2}as = 0$.

Si area circuli D E ſeu baſeos ſegmenti D F E ſtatuatur conſtans, quaeraturque, quonam caſu ſuperficies ſegmenti fiat Maximum vel Minimum, ponatur area baſeos $= s$, ſegmenti $= S$. Eritque $s = \pi D G^2 = 2\pi ar - \pi a^2$ et $S = 2\pi ar = s + \pi a^2$, vnde $\frac{\partial S}{\partial a} = +2\pi a$, quod oſtendit, caſu $a = 0$ aream S fieri Minimum. Illo enim caſu eſt $s = 2\pi ar = S$, ob $r = \infty$; aliis vero omnibus caſibus maior eſt $S = s + \pi a^2$. Fit quoque $\frac{\partial\partial S}{\partial a^2} = +2\pi$. Hic itaque caſus $a = r$ non praebet Maximum, quod quoque rei natura docet. Quia enim s ceu functio ipſius a conſiderata hocce caſu Maximum eſt, erit $\partial s = 0$, vel s infinite parum decreſcit creſcente a, vnde non opus eſt vt r augeatur, licet a nonnihil creſcat. Eodem vero caſu S, quae conſtat ex parte conſtante s et variabili πa^2, admodum creſcere debet, vnde non poteſt eſſe Maximum. At eandem ob cauſam patet, neque fieri poſſe Minimum, quia S ſenſibiliter decreſcit, decreſcente a et r non mutato.

§. 6. Sit nunc (Fig. 8.) A C B Conus rectus, cuius altitudo C D $= a$, radius baſeos A D $= r$, ac primum ſtatuatur area circuli A B conſtans, qua poſita $= s$, erit $s = \pi rr$ Tab. II. Fig. 8.

adeoque r conſtans. Si nunc Maxima et Minima pro ſuperficie conica A C B $=$ S quaerantur, erit

$$S = \pi r \text{ A C} = \pi r \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

atque hic per ſe patet, ob r conſtantem, S cum a in infinitum creſcere ſeu eo fieri maiorem, quo minor angulus A C D: ergo S fieri nequit Maximum. Non minus euidens eſt, S cum a decreſcere ſed non in infinitum. Si nempe $a = 0$, fit $S = \pi r^2$; quodſi autem a vlterius decreſcat abeatque in partem negatiuam (vnde oritur Conus noſtro in vertice oppoſitus), S rurſus creſcit. Ergo caſu $a = 0$, S fit Minimum. Idem differentiando elicitur. Eſt nempe $\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{\pi r a}{\sqrt{(a^2 + r^2)}}$, quod euaneſcit poſito $a = 0$. Eodem autem caſu fit

$$\frac{\partial \partial s}{\partial a^2} = \frac{\pi r}{\sqrt{(a^2 + r^2)}} - \frac{\pi r a^2}{\sqrt{(a^2 + r^2)^3}} = \pi, \text{ poſitiuum.}$$

Contemplemur iam ipſum Conum A C B, quo poſito $= S$, ſumatur ſuperficies conica A C B $= s$ conſtans, vt ſit $s = \pi r \sqrt{(a^2 + r^2)}$, $S = \frac{1}{3} \pi a r^2$. Quoniam aequatio inter binas variabiles a et r quaeritur, S foret exprimenda per s, quod ob a et r ſigno radicali in aequatione pro s affecTas difficultate non careret. Verum incommodum hoc euitari poteſt, eliminando differentiale quantitatis a ope aequationis: $\partial s = 0$, ob s conſtantem. Hinc erit

$$\frac{\partial s}{\pi} = 0 = \partial r \sqrt{(r^2 + a^2)} + \frac{r^2 \partial r}{\sqrt{(r^2 + a^2)}} + \frac{a r \partial a}{\sqrt{(r^2 + a^2)}},$$

ſeu $\partial r (2 r^2 + a^2) + a r \partial a = 0$, vnde naſcitur $\partial a = -\frac{(2 r^2 + a^2) \partial r}{a r}$. Eſt porro $\partial S = \frac{1}{3} \pi (2 a r \partial r + r^2 \partial a)$, quod poſitum $= 0$, introducto ſimul valore ipſius ∂a modo inuento, praebet:

$$2 a r \partial r - \frac{r (2 r^2 + a^2) \partial r}{a} = 0, \text{ ſeu } a^2 r = 2 r^3;$$

quae aequatio tres habet radices: 1.) $r = 0$, 2.) $a = + r \sqrt{2}$, 3.) $a = - r \sqrt{2}$. Qui valores quo penitius inſpiciantur, con-

conſideretur

$$\frac{3\partial\partial s}{\pi\partial r} = 2a\partial r + 2r\partial a - \frac{6r^2\partial r}{a} + \frac{2r^3\partial a}{a^2} - a\partial r - r\partial a$$
$$= a\partial r - \frac{(2r^2+a^2)\partial r}{a} - \frac{6r^2\partial r}{a} - \frac{2r^2(2r^2+a^2)\partial r}{a^3}, \text{ h. e.}$$
$$\frac{3\partial\partial s}{\pi\partial r^2} = \frac{a^4 - 2a^2r^2 - a^4 - 6a^2r^2 - 4r^4 - 2a^2r^2}{a^3} = -\frac{2r^2(5a^2+2r^2)}{a^3}.$$

Iam vero caſu 1.) fit $s = \pi r a$, adeoque $a = \infty$, et $\frac{\partial\partial s}{\partial r^2} = 0$, habens factorem $\frac{r^2}{a} = r^3$, ſeu tres factores aequales euaneſcentes, vnde et $\partial^3 S$ et $\partial^4 S$, non autem $\partial^5 S$ factorem habebit r euaneſcentem. Quapropter radix $r = 0$ neque Maximum dat neque Minimum. Caſu 2.) et 3.) fit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial r^2} = -\frac{\pi a^2(6a^2)}{3a^3} = -2\pi a = \mp 2\pi r\sqrt{2};$$

vnde concluditur, ambo radices dare Maximum, quia poſito a negatiuo, $S = \frac{1}{3}\pi a r^2$ etiam valorem induit negatiuum, ideoque ſignum poſitiuum, quo $\partial\partial S$ affectum eſt, hic ſpeciem Minimi mentiens, reuera oſtendit, S eſſe Maximum negatiuum: quod per ſe patet, ſiquidem Cono oppoſito reſpondet.

S itaque Maximum fit, ſi $\frac{a}{r} = \sqrt{2}$, h. e. tang. CAD = 1,4142136. Omnium itaque Conorum rectorum, qui aequalem habent ſuperficiem, ille eſt maximus, cuius latus ad baſin inclinatur ſub angulo 54°. 44′ . . . . . , h. e. ſub quo alae molarum alatarum ad axem inclinatae eſſe debent, vt ventus in eas adhuc quieſcentes maximam vim exerat.

PHYSICO-
MATHEMATICA.

PHYSICO-

MATHEMATICA.

DE VIRIBVS CENTRIPETIS, AD CVRVAS NON IN EODEM PLANO SITAS DESCRIBENDAS, REQVISITIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Notiſſimum eſt problema & a ſummo *Newtono* egregie ſolutum, quo vis centripeta ad datum punctum fixum tendens quaeritur, a qua ſi corpus ſollicitetur, per datam lineam curuam promoueatur. Euidens autem eſt in enunciatione huius problematis tacite aſſumi, tam totam curuam a corpore deſcribendam in eodem plano ſitam eſſe debere, quam ipſum centrum virium in eodem plano eſſe ſtatuendum, quando quidem certum eſt, omne corpus ab vnica vi centripeta ſollicitatum ſemper in eodem plano moveri, quod per ipſum centrum virium tranſeat. Hinc ergo patet, ſi curva a corpore deſcribenda non fuerit in eodem plano ſita, tum omnino fieri non poſſe vt talis motus ab vnica vi centripeta producatur, ſed ad minimum duo centra virium diuerſa conſtitui debere. Oſtendam igitur hic, talia duo centra virium ſemper pro arbitrio accipi poſſe, quomodocunque curua deſcripta extra planum diuagetur, ac perpetuo illas binas vires centripetas ita determinari poſſe, vt corpus ab iis ſollicitatum per curuam propoſitam promoueri queat.

§. 2.

Tab. III. Fig. 1.

§. 2. Sit igitur propoſita curua quaecunque A Z, cuius punctum quoduis Z vtcunque extra planum tabulae ſit poſitum, cuius ergo locus more ſolito per ternas coordinatas $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = x$ definiatur, inter quas igitur ob curuam datam duplex relatio detur neceſſe eſt, vnde pro quauis abſciſſa x tam valor ipſius y quam ipſius z aſſignari poſſit. Quin etiam, introducendo ipſius curuae elementum, quod ſit $= \partial s$, poni poterit $\partial x = p\,\partial s$, $\partial y = q\,\partial s$ et $\partial z = r\,\partial s$, ita vt ſit $pp + qq + rr = 1$, et quouis caſu valores harum litterarum vt cogniti ſpectari poterunt.

§. 3. Conſtituatur igitur alterum centrum virium in ipſo puncto C ac ponatur ab eo diſtantia puncti Z ſcilicet $CZ = v$, ita vt ſit $vv = xx + yy + zz$; tum vero denotet V ipſam vim centripetam qua corpus in Z verſus iſtud centrum C vrgeri debet, ex qua ergo ſecundam directiones coordinatarum reſultabunt ternae vires, quae erunt

ſecundum $XC = \frac{Vx}{v}$,

ſecundum $YX = \frac{Vy}{v}$ et

ſecundum $ZY = \frac{Vz}{v}$.

§. 4. Alterum autem centrum virium C' vbicunque in plano quidem tabulae accipiatur, pro quo ſi punctum Z pariter per ternas coordinatas prioribus parallelas referatur, vocentur eae $C'X' = x'$, $X'Y = y'$ et $YZ = z$ vt ante, quae ergo a praecedentibus tantum quantitate conſtante diſcrepabunt, ita vt ſit $x' = x + a$, et $y' = y + b$. Quod ſi vero centrum C' extra planum tabulae accipiatur, tum praeterea erit $z' = z + c$; vnde differentialia harum coordinatarum a praecedentibus non diſcrepabunt, ideoque litterae p, q, r perinde ad ambo centra virium C et C' referentur. Statuatur igitur pro hoc centro C' di-

distantia $C'Z = v'$ et ipsa vis centripeta huc tendens $= V'$, ita vt nunc sit $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$; at vires pro ternis nostris directionibus hinc oriundae erunt

secundum $X'C' = \frac{V'x'}{v'}$,

secundum $YX' = \frac{V'y'}{v'}$,

secundum $ZY = \frac{V'z'}{v'}$.

§. 5. Introducamus nunc elementum temporis ∂t, quo pro constanti assumto, principia motus sequentes tres aequationes suppeditabunt:

I. $\frac{\partial\partial x}{\alpha\partial t^2} = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'}$;

II. $\frac{\partial\partial y}{\alpha\partial t^2} = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'}$;

III. $\frac{\partial\partial z}{\alpha\partial t^2} = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'}$;

vbi α denotat certam quantitatem constantem, ex ratione qua tam tempus t exprimitur quam ipsae vires V et V' ad mensuras cognitas reuocantur, petendam. Cum igitur hic tres habeantur aequationes, facile intelligitur, ex iis binas vires incognitas V et V' semper determinari posse.

§. 6. Elidamus hinc primo vim V', id quod duplici modo fieri poterit; primo scilicet ex aequationum §. praecedentis prima et secunda fiet

$$\frac{y'\partial\partial x - x'\partial\partial y}{\alpha\partial t^2} = -\frac{V(y'x - x'y)}{v}$$

deinde secunda et tertia simili modo praebent

$$\frac{z'\partial\partial y - y'\partial\partial z}{\alpha\partial t^2} = -\frac{V(z'y - y'z)}{v}$$

quarum haec per illam diuisa perducit ad hanc aequationem:

$$\frac{z'\partial\partial y - y'\partial\partial z}{y'\partial\partial x - x'\partial\partial y} = \frac{z'y - y'z}{y'x - x'y}$$

vnde etiam ipsum temporis elementum ∂t est expulsum; inte-

rim tamen conditio, qua ∂t conſtans eſt aſſumtum, etiamnunc inhaeret, vnde ratio differentialium ſecundi gradus, quae per ſe forent indefinita, peti debet.

§. 7. Quod ſi iam poſtrema iſta aequatio euoluatur, peruenietur ad ſequentem aequationem

$$y'\partial\partial x(z'y-y'z)+y'\partial\partial y(x'z-z'x)+y'\partial\partial z(y'x-x'y)=0,$$

quae commode per y' diuidi ſe patitur, et aequatio induet hanc formam:

$$\partial\partial x(z'y-y'z)+\partial\partial y(x'z-z'x)+\partial\partial z(y'x-x'y)=0.$$

Hic iam introducamus valores ſupra notatos, ſcilicet $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, et prodibit haec aequatio:

$$\partial\partial x\,(cy-bz)+\partial\partial y\,(az-cx)+\partial\partial z\,(bx-ay)=0,$$

quae ſecundum litteras a, b, c diſpoſita euadet

$$a(z\partial\partial y-y\partial\partial z)+b(x\partial\partial z-z\partial\partial x)+c(y\partial\partial x-x\partial\partial y)=0.$$

§. 8. Hic igitur ſingulae partes manifeſto ſponte ſunt integrabiles, vnde integratio dabit

$$a(z\partial y-y\partial z)+b(x\partial z-z\partial x)+c(y\partial x-x\partial y)=\text{conſt.}$$

quam conſtantem vtique formam differentialem habere oportet; quare cum elementum ∂t ſumtum ſit conſtans, aequatio ita repraeſentari debet:

$$a(z\partial y-y\partial z)+b(x\partial z-z\partial x)+c(y\partial x-x\partial y)=C\partial t.$$

Ac ſi iam introducamus poſitiones $\partial x=p\partial s$, $\partial y=q\partial s$ et $\partial z=r\partial s$, haec aequatio accipiet hanc formam:

$$a\partial s(qz-ry)+b\partial s(rx-pz)+c\partial s(py-qx)=C\partial t,$$

atque hinc, quia elementum ∂t ſuppoſitum eſt conſtans, differentiando colligetur differentiale ſecundum $\partial\partial s$, cum fiat

$a\partial\partial s$

$$\left\{\begin{array}{l} a\,\partial\partial s\,(qz-ry)+b\,\partial\partial s\,(rx-pz)+c\,\partial\partial s\,(py-qx) \\ +a\,\partial s\,(z\,\partial q-y\,\partial r)+b\,\partial s\,(x\,\partial r-z\,\partial p)+c\,\partial s\,(y\,\partial p-x\,\partial q) \end{array}\right\}=0.$$

Sicque erit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial s}=\frac{a\,(y\,\partial r-z\,\partial q)+b\,(z\,\partial p-x\,\partial r)+c\,(x\,\partial q-y\,\partial p)}{a\,(qz-ry)+b\,(rx-pz)+c\,(py-qx)}.$$

§. 9. Cum igitur formula $\frac{\partial s}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis in puncto Z, si haec celeritas vocetur $=u$, vt sit $\partial t=\frac{\partial s}{u}$, iam adepti sumus formulam pro corporis celeritate u; erit enim

$$u=\frac{c}{a\,(qz-ry)+b\,(rx-pz)+c\,(py-qx)}.$$

Introducendo autem istam celeritatem, cum in nostris formulis principalibus sit $\frac{\partial\partial x}{\partial t}=\partial.\frac{\partial x}{\partial t}$, ob $\partial x=p\,\partial s$ et $\partial t=\frac{\partial s}{u}$, erit $\frac{\partial\partial x}{\partial t}=\partial.\,pu=p\,\partial u+u\,\partial p$; similique modo erit

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t}=\partial.\,qu=q\,\partial u+u\,\partial q \text{ et}$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t}=\partial.\,ru=r\,\partial u+u\,\partial r.$$

§. 10. His inuentis ambas vires quaesitas V et V′ definire licebit; cum enim inuenerimus:

$$\frac{y'\,\partial\partial x-x'\,\partial\partial y}{\alpha\,\partial t^2}=-\frac{V}{v}\,(y'x-x'y)=-\frac{V'}{v}\,(bx-ay),$$

multiplicando per $\alpha\,\partial t$ et loco $\frac{\partial\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial\partial y}{\partial t}$ valores ante inuentos substituendo, erit

$$y'\,(p\,\partial u+u\,\partial p)-x'\,(q\,\partial u+u\,\partial q)=-\frac{\alpha V\,\partial t}{v}\,(bx-ay),$$

ergo ob $x'=x+a$ et $y'=y+b$, erit

$$V=\frac{(x+a)\,(q\,\partial u+u\,\partial q)-(y+b)\,(p\,\partial u+u\,\partial p)}{bx-ay}\cdot\frac{v}{\alpha\,\partial t}.$$

§. 11. Simili modo cum ex aequationibus principalibus elici queat haec aequatio y'

$$\frac{y\partial\partial x - x\partial\partial y}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{V'}{v'}(x'y - y'x) = -\frac{V'}{v'}(ay - bx),$$

factis iisdem substitutionibus perueniemus ad sequentem formam:

$$V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{x(q\,\partial u + u\,\partial q) - y(p\,\partial u + u\,\partial p)}{ay - bx}.$$

Sicque pro quouis casu oblato, non solum ambas vires centripetas V et V′, sed etiam celeritatem corporis in singulis punctis curuae propositae assignare licet.

§. 12. Quoniam ternas coordinatas x, y et z inter se permutare licet, etiam pro vtraque vi centripeta V et V′ ternae expressiones exhiberi poterunt, quae erunt pro vi V ad centrum C tendente

$$\text{I. } V = \frac{v}{\alpha\,\partial t}\left(\frac{(x+a)(q\,\partial u + u\,\partial q) - (y+b)(p\,\partial u + u\,\partial p)}{bx - ay}\right),$$

$$\text{II. } V = \frac{v}{\alpha\,\partial t}\left(\frac{(y+b)(r\,\partial u + u\,\partial r) - (z+c)(q\,\partial u + u\,\partial q)}{cy - bz}\right),$$

$$\text{III. } V = \frac{v}{\alpha\,\partial t}\left(\frac{(z+c)(p\,\partial u + u\,\partial p) - (x+a)(r\,\partial u + u\,\partial r)}{az - cx}\right),$$

Simili modo pro altera vi centripeta V′ ad centrum C′ tendente

$$\text{I. } V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{x(q\,\partial u + u\,\partial q) - y(p\,\partial u + u\,\partial p)}{ay - bx},$$

$$\text{II. } V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{y(r\,\partial u + u\,\partial r) - z(q\,\partial u + u\,\partial q)}{bz - cy},$$

$$\text{III. } V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{z(p\,\partial u + u\,\partial p) - x(r\,\partial u + u\,\partial r)}{cx - az},$$

ALIA SOLVTIO
eiusdem quaestionis multo succinctior.

Tab. III. Fig. 2.

§. 13. Quia ternas directiones fixas, quibus ternas coordinatas x, y, z parallelas statuimus, pro lubitu accipere licet, solutio multo fiet simplicior, si axem, in quo abscissas x, capimus, per ipsa bina centra virium C et C′ ducamus. Sint igitur C et C′ bina centra virium, et ne alteri prae altero vl-

lam

lam praerogatiuam tribuamus, abſciſſas OX a puncto medio O computemus, quem in finem ponamus $OC = OC' = k$, vt pro centro C ſit abſciſſa $CX = x + k$, pro altero vero centro $C'X = x - k$, quia in partem contrariam vergit, binae autem reliquae coordinatae XY et YZ aeque referuntur. Hinc ductis diſtantiis CZ et C'Z, erit

$$CZ = v = \sqrt{(x+k)^2 + yy + zz} \text{ et}$$
$$C'Z = v' = \sqrt{(x-k)^2 + yy + zz},$$

ita vt ſit $vv + v'v' = 4kx$.

§. 14. Quod ſi nunc vt ante vis ad centrum C tendens vocetur $= V$, altera vero vis ad centrum C' tendens $= V'$, ſumto elemento temporis ∂t conſtante tres aequationes motum determinantes erunt:

I. $\frac{\partial\partial x}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{V(x+k)}{v} - \frac{V'(x-k)}{v'}$;

II. $\frac{\partial\partial y}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y}{v'}$;

III. $\frac{\partial\partial z}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z}{v'}$;

vbi ſtatim commode vſu venit, vt ſecunda per tertiam diuiſa praebeat hanc ſimplicem aequalitatem $\frac{\partial\partial y}{\partial\partial z} = \frac{y}{z}$, ideoque $z\partial\partial y - y\partial\partial z = 0$, hinc igitur integrando fiet $z\partial y - y\partial z = C\partial t = \frac{c\partial s}{u}$, poſito ſcilicet elemento curuae deſcriptae $= \partial s$ et celeritate $= u$.

§. 15. Ponamus nunc vt ante $\partial x = p\partial s$, $\partial y = q\partial s$ et $\partial z = r\partial s$, ita vt ſit $pp + qq + rr = 1$, eritque $C\partial t = \partial s(qz - ry)$, ideoque $u = \frac{c}{qz - ry}$. Porro vero ob ſumtum ∂t conſtans fiet $\partial\partial s = \frac{\partial s(y\partial r - z\partial q)}{qz - ry}$, vel etiam per celeritatem habebimus $\partial\partial s = \frac{\partial u\,\partial s}{u}$, vnde erit

$$\partial\partial x = \frac{\partial s(p\partial u + u\partial p)}{u},$$
$$\partial\partial y = \frac{\partial s(q\partial u + u\partial q)}{u} \text{ et}$$
$$\partial\partial z = \frac{\partial s(r\partial u + u\partial r)}{u},$$

vnde porro colligitur: $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{u(r\partial u + u\partial r)}{\partial s}$, $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = \frac{u(q\partial u + u\partial q)}{\partial s}$ et $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{u(r\partial u + u\partial r)}{\partial s}$, quae ternae expreſſiones breuitatis gratia per litteras P, Q et R indicentur, vbi notaſſe iuuabit fore $\frac{Q}{R} = \frac{y}{z}$, ob $u = \frac{c}{qz - ry}$.

§. 16. Nunc pro ipſis viribus centripetis inueniendis combinemus primam aequationem cum ſecunda, ac primo

I. y — II. $(x - k)$ praebet

$\frac{P.y - Q(x-k)}{\alpha} = -\frac{2Vky}{v}$, ideoque

vis $V = \frac{vQ(x-k) - vPy}{2\alpha ky}$.

Simili modo combinatio I. y — II. $(x + k)$ praebet

$\frac{yP - Q(x+k)}{\alpha} = \frac{2V'ky}{v'}$ ideoque vis

$V' = \frac{v'Py - vQ(x+k)}{2\alpha ky}$,

quas ambas formulas etiam ita repraeſentare licet

$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{Qx - Py}{ky} - \frac{Q}{y}$ et $\frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{Py - Qx}{ky} - \frac{Q}{y}$.

Ad illuſtrationem huius ſolutionis quaedam exempla ſubiungamus.

Problema I.

§. 17. *Si corpus vtcunque in ſuperficie cylindri moueri debeat, in cuius axe ambo centra virium C et C′ accipiantur inuenire tam celeritatem corporis* u *quam ambas vires centripetas V et V′.*

Solutio.

Solutio.

Sit radius cylindri $= a$ et distantia centrorum $CC = 2k$, eritque $yy + zz = aa$; ponatur ergo

$$y = a \text{ cos. } \Phi \text{ et } z = a \text{ sin. } \Phi,$$

tum vero, quia motum quemcunque in superficie cylindri statuimus, abscissa x tanquam certa functio anguli Φ spectari poterit, vnde fiat $\partial x = \Pi \partial \Phi$, inde autem colligentur distantiae corporis a centris virium

$$v = \sqrt{(x+k)^2 + aa} \text{ et } v' = \sqrt{(x-k)^2 + aa};$$

deinde vero ob $\partial y = -a\,\partial\Phi \text{ sin. } \Phi$ et $\partial z = a\,\partial\Phi \text{ cos. } \Phi$, erit $\partial s = \partial\Phi \sqrt{(\Pi\Pi + aa)}$, ex quo porro fiet $p = \frac{\pi}{\sqrt{(\Pi\Pi+aa)}}$, $q = \frac{a \text{ sin. } \Phi}{\sqrt{(\Pi\Pi+aa)}}$ et $r = \frac{a \text{ cos. } \Phi}{\sqrt{(\Pi\Pi+aa)}}$.

His positis celeritas corporis in Z reperietur

$$u = \frac{c\sqrt{(\Pi\Pi+aa)}}{aa}.$$

Deinde pro ipsis viribus inueniendis quaerantur ante omnia valores litterarum P, Q, R; reperieturque

$$P = \frac{cc\,\partial\Pi}{a^3\,\partial\Phi} = \frac{cc}{a^3}\Pi,$$

posito $\partial\Pi = \Pi'\partial\Phi$ Porro erit $Q = -\frac{cc \text{ cos. } \Phi}{a^3}$, ac denique $R = -\frac{cc \text{ sin. } \Phi}{a^3}$, vnde vtique habetur $\frac{Q}{R} = \frac{y}{z} = \frac{\text{cos. } \Phi}{\text{sin. } \Phi}$.

His valoribus inuentis pro ipsis viribus quaeramus primo formulam:

$$\frac{Q\,x - P\,y}{y} = -\frac{cc}{a^3}(x+\Pi),$$

ac tum ob $\frac{Q}{y} = -\frac{cc}{a^3}$ habebimus:

$$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{cc}{a^3} - \frac{cc}{a^3}\frac{(x+\Pi)}{k} = \frac{cc}{a^3}\left(1 - \frac{x+\Pi}{k}\right),$$

$$\frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{cc}{a^3} + \frac{cc}{a^3}\frac{(x-\Pi)}{k} = \frac{cc}{a^3}\left(1 + \frac{x+\Pi}{k}\right),$$

vnde

vnde ipſae vires erunt

$$V = \frac{c\,c\,v}{2\alpha a^4}\left(1 - \frac{x-\Pi}{k}\right) \text{ et } V' = \frac{c\,c\,v'}{2\alpha a^4}\left(1 + \frac{x+\Pi}{k}\right).$$

Corollarium 1.

§. 18. Quod ſi velimus vt corpus in ſuperficie cylindri deſcribat helicem Archimedis, ſeu eam lineam, quae intra ſuos terminos eſt breuiſſima, poni debet $x = na\Phi$, ideoque $\Pi = na$ et $\Pi' = 0$, vnde ſequitur celeritas corporis $u = \frac{c\sqrt{(1+nn)}}{a}$, quae ergo perpetuo manebit conſtans, vnde ſi vocetur $u = c$, erit $C = \frac{ac}{\sqrt{(1+nn)}}$, tum vero ambae vires centripetae ita erunt comparatae

$$V = \frac{c\,c\,v}{2\alpha a^4}\left(1 - \frac{na(1+\Phi)}{k}\right) \text{ et } V' = \frac{c\,c\,v'}{2\alpha a^4}\left(1 + \frac{na(1+\Phi)}{k}\right),$$

quare ſi loco C ſcribamus valorem modo aſſignatum, erit

$$V = \frac{c\,c\,v}{2\alpha a a(1+nn)}\left(1 - \frac{na(1+\Phi)}{k}\right) \text{ et}$$

$$V' = \frac{c\,c\,v'}{2\alpha a a(1+nn)}\left(1 + \frac{na(1+\Phi)}{k}\right).$$

Corollarium 2.

§. 19. Quod ſi factorem conſtantem $\frac{cc}{2\alpha a a(1+nn)}$ deſignemus litera, A habemus

$$V = A\,v\left(1 - \frac{na(1+\Phi)}{k}\right) \text{ et } V' = A\,v'\left(1 + \frac{na(1+\Phi)}{k}\right),$$

vnde patet vtramque vim centripetam conſtare duabus partibus, quarum prior ſimpliciter proportionalis eſt diſtantiae corporis a centro, poſterior vero eidem diſtantiae per angulum Φ multiplicatae, quandoquidem erit

$$V = A\left(1 - \frac{na}{k}\right)v - \frac{A\,na\Phi v}{k} \text{ et}$$

$$V' = A\left(1 + \frac{na}{k}\right)v' + \frac{A\,na\Phi v'}{k},$$

vbi poſterior vis V' maior eſt priore, propterea quod corpus a cen-

a centro C recedere, contra vero ad centrum C′ accedere assumsimus.

Problema II.

§. 20. *Si corpus vtcunque in superficie globi moueri debeat, et ambo centra virium in ipsis polis huius globi statuantur, inuenire tam celeritatem corporis* u, *quam ambas vires centripetas V et V′.*

Solutio.

Sint igitur C et C′ poli nostrae Sphaerae, cuius radius ponatur $= a$, eritque O eius centrum et $k = a$. Cum igitur esse debeat $x\,x + y\,y + z\,z = a\,a$, statuamus $x = a$ sin. η, tum vero $y = a$ cos. η cos. Φ, et $z = a$ cos. η sin. Φ, vbi in genere ambo anguli η et Φ relationem quamcunque inter se tenere possunt, ex quo statuamus $\partial\Phi = \Pi\,\partial\eta$ et $\partial\Pi = \Pi'\,\partial\eta$. Primo igitur distantiae corporis ab vtroque polo erunt

$$v = a\sqrt{(2 + 2 \text{ sin. } \eta)} = 2a \text{ cos. } (45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta) \text{ et}$$
$$v' = a\sqrt{(2 - 2 \text{ sin. } \eta)} = 2a \text{ sin. } (45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta).$$

Cum nunc sit $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$, ob

$$\partial x = a\,\partial\eta \text{ cos. } \eta$$
$$\partial y = -a\,\partial\eta \text{ (sin. } \eta \text{ cos. } \Phi + \Pi \text{ cos. } \eta \text{ sin. } \Phi) \text{ et}$$
$$\partial z = a\,\partial\eta \text{ (}\Pi \text{ cos. } \eta \text{ cos. } \Phi - \text{sin. } \eta \text{ sin. } \Phi),$$

habebitur

$$\partial s = a\,\partial\eta\sqrt{(1 + \Pi\,\Pi \text{ cos. } \eta^2)}.$$

Hinc iam porro deducimus

$$p = \frac{\text{cos. } \eta}{\sqrt{(1 + \Pi\,\Pi \text{ cos. } \eta^2)}},$$
$$q = -\frac{(\text{sin. } \eta \text{ cos. } \Phi + \Pi \text{ cos. } \eta \text{ sin. } \Phi)}{(1 + \Pi\,\Pi \text{ cos. } \eta^2)} \text{ et}$$
$$r = \frac{\Pi \text{ cos. } \eta \text{ cos. } \Phi - \text{sin. } \eta \text{ sin. } \Phi}{\sqrt{(1 + \Pi\,\Pi \text{ cos. } \eta^2)}},$$

quamobrem hinc celeritas corporis ita definietur, vt ſit

$$u = \frac{c\sqrt{(1 + \Pi\Pi \cos.\eta^2)}}{a\,\Pi \cos.\eta^2},$$

vnde patet, dum corpus ad alterutrum polum pertingit, quod fit quando angulus η fit rectus, celeritatem corporis ibi fieri infinitam, niſi forte quantitas Π euadat infinita, ita vt $\Pi \cos.\eta^2$ euadat quantitas finita puta A, interim tamen etiam hoc caſu, quoniam fit $u = \frac{C\sqrt{(1 + \frac{AA}{\cos.\eta^2})}}{aA}$, manifeſto celeritas fit infinita.

Nunc vt etiam valores litterarum P, Q, R eruamus, pro P habemus primo $p\,u = \frac{c}{a\,\Pi \cos.\eta}$, hincque

$$\partial.p\,u = \frac{c\,\partial\eta}{a}\,\frac{(\Pi \sin.\eta - \Pi' \cos.\eta)}{\Pi\Pi \cos.\eta^2}, \text{ vnde ob}$$

$$\frac{u}{\partial s} = \frac{c}{a\,a\,\Pi\,\partial\eta \cos.\eta^2} \text{ reperietur}$$

$$P = \frac{c\,c}{a^3}\,\frac{(\Pi \sin.\eta - \Pi' \cos.\eta)}{\Pi^3 \cos.\eta^4}.$$

Deinde ob

$$q\,u = -\frac{c\,(\sin.\eta \cos.\Phi + \Pi \cos.\eta \sin.\Phi)}{a\,\Pi \cos.\eta^2} \text{ erit}$$

$$\partial.q\,u = -\frac{c\,\partial\eta \cos.\Phi}{a}\,\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\cos.\eta^2 + 2\Pi \sin.\eta^2 - \Pi' \sin.\eta \cos.\Phi)}{\Pi\Pi \cos.\eta^3},$$

quae expreſſio ducta in $\frac{u}{\partial s}$ dabit

$$Q = -\frac{c\,c \cos.\Phi}{a^3}\,\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\cos.\eta^2 + 2\Pi \sin.\eta^2 - \Pi' \sin.\eta \cos.\eta)}{\Pi^3 \cos.\eta^5}.$$

Denique cum ſit

$$r\,u = -\frac{c}{u}\,\frac{(\sin.\eta \sin.\Phi - \Pi \cos.\eta \cos.\Phi)}{\Pi \cos.\eta^2} \text{ erit}$$

$$\partial.r\,u = -\frac{c\,\partial\eta \sin.\Phi}{a}\,\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\cos.\eta^2 + 2\Pi \sin.\eta^2 - \Pi' \sin.\eta \cos.\eta)}{\Pi\Pi \cos.\eta^3},$$

quae formula ducta in $\frac{u}{\partial s}$ dabit

$$R = -\frac{c\,c \sin.\Phi}{a^3}\,\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\cos.\eta^2 + 2\Pi \sin.\eta^2 - \Pi' \sin.\eta \cos.\eta}{\Pi^3 \cos.\eta^5},$$

vnde manifeſtum eſt eſſe $Q : R = y : z$ hoc eſt $= \cos.\Phi : \sin.\Phi$.

Cum

Cum nunc ob $k = a$ ſit

$\frac{2\alpha V}{v'} = \frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} - \frac{Q}{y}$ et $\frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{P}{a} - \frac{Qx}{ay} - \frac{Q}{y}$, erit

$\frac{Q}{y} = -\frac{cc}{a^4}\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\,cof.\eta^2 + 2\Pi\,ſin.\eta^2 - \Pi'\,ſin.\eta\,cof.\eta)}{\Pi^3\,cof.\eta^6}$ et

$\frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} = -\frac{cc}{a^4}\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\,ſin.\eta\,cof.\eta^2 + 2\Pi\,ſin.\eta^3 - \Pi'\,ſin.\eta^2\,cof.\eta + \Pi\,ſin.\eta\,cof.\eta^2 - \Pi'\,cof.\eta^3)}{\Pi^3\,cof.\eta^6}$,

quae expreſſiones etiam ita repraeſentari poſſunt

$\frac{Q}{y} = -\frac{cc}{a^4\Pi^4\,cof.\eta^6}(\Pi(1+\Pi\Pi\,cof.\eta^2) - ſin.\eta\frac{\partial.\Pi\,cof.\eta}{\partial\eta})$ et

$\frac{P}{a} = \frac{-cc}{a^4\Pi^3\,cof.\eta^4}\frac{\partial.\Pi\,cof.\eta}{\partial\eta}$ et hinc

$\frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} = \frac{-cc}{a^4\Pi^3\,cof.\eta^6}(\Pi\,ſin.\eta\,(1+\Pi\Pi\,cof.\eta^2) - \frac{\partial.\Pi\,cof.\eta}{\partial\eta})$.

His autem valoribus ſubſtitutis fiet

$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{cc(1-ſin.\eta)}{a^4\Pi^3\,cof.\eta^6}(\Pi(1+\Pi\Pi\,cof.\eta^2) + \frac{\partial.\Pi\,cof.\eta}{\partial\eta}$ et

$\frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{cc(1+ſin.\eta)}{a^4\Pi^3\,cof.\eta^6}(\Pi(1+\Pi\Pi\,cof.\eta^2) - \frac{\partial.\Pi\,cof.\eta}{\partial\eta})$,

quibus formulis ergo ambae vires centripetae V et V′ ſatis commode exprimuntur, vbi meminiſſe iuuabit eſſe

$v = a\sqrt{2}\,(1+ſin.\eta)$ et $v' = a\sqrt{2}\,(1-ſin.\eta)$.

EVOLVTIO CASVS

quo corpus in ſuperficie Sphaerica Loxodromiam deſcribit.

§. 21. Angulus ergo, ſub quo via corporis ſingulos meridianos interſecat, debet eſſe conſtans, cuius tangens ſi ponatur $= n$, reperietur $\frac{\partial\Phi\,cof.\eta}{\partial\eta} = n$, vnde ergo fit $\partial\Phi = \frac{n\,\partial\eta}{cof.\eta}$, ſicque habebitur $\Pi = \frac{n}{cof.\eta}$, ac propterea formula $\Pi\,cof.\eta = n$ erit conſtans eiusque differentiale euaneſcet. Hic ergo erit vt ante $v = a\sqrt{2}\,(1+ſin.\eta)$ et $v' = a\sqrt{2}\,(1-ſin.\eta)$; tum vero prodibit celeritas $u = \frac{c\sqrt{(1+nn)}}{a\,n\,cof.\eta}$, quae ergo in ipſis polis vbi $\eta = 90°$ fiet infinita. Deinde autem ambae vires cen-

tripetae ita erunt comparata vt ſit

$$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{CC(1-\sin.\eta)(1+nn)}{nn\,a^4\cos.\eta^4} \text{ et } \frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{CC(1+\sin.\eta)(1+nn)}{nn\,a^4\cos.\eta^4},$$

vnde loco v et v' valoribus ſubſtitutis colligetur

$$V = \frac{(1+nn)CC(1-\sin.\eta)\sqrt{2}(1+\sin.\eta)}{2\alpha\,nn\,a^3\cos.\eta^4} \text{ et}$$

$$V' = \frac{(1+nn)CC(1+\sin.\eta)\sqrt{2}(1-\sin.\eta)}{2\alpha\,nn\,a^3\cos.\eta^4}.$$

Cum nunc ſit $\cos.\eta^2 = (1+\sin.\eta)(1-\sin.\eta)$, hae formulae reducentur ad ſequentes

$$V = \frac{(1+nn)CC\sqrt{2}}{2\alpha\,nn\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{(1+\sin.\eta)}} = \frac{(1+nn)CC}{\alpha\,nn\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1+\sin.\eta)}} \text{ et}$$

$$V' = \frac{(1+nn)CC}{\alpha\,nn\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1-\sin.\eta)}},$$

vnde patet fore $V : V' = v' : v$ ita vt ſit $V'v' = Vv$.

§. 22. Quod ſi fuerit $n = 0$, quo caſu corpus movebitur in ipſo meridiano, erit primo celeritas $u = \infty$; quia autem C eſt conſtans arbitraria, ſi ponamus $C = nA$, fiet $u = \frac{A}{a\cos.\eta}$; ipſae autem vires erunt

$$V = \frac{AA}{\alpha\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1+\sin.\eta)}} \text{ et } V' = \frac{AA}{\alpha\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1-\sin.\eta)}},$$

vbi notetur, dum corpus per aequatorem tranſit vbi $\eta = 0$, tum fore $u = \frac{A}{a}$, atque vires $V = \frac{AA}{\alpha\,a^3\sqrt{2}}$ et $V' = \frac{AA}{\alpha\,a^3\sqrt{2}}$, ſicque hae vires erunt aequales, quo longius autem corpus ab aequatore recedit, tam celeritas quam ambae vires continuo fiunt maiores. Ponamus corpus iam tam prope ad polum acceſſiſſe, vt ſit $\eta = 90^\circ - \omega$, exiſtente ω quaſi infinite paruo; eritque $\cos.\eta^2 = \omega\omega$, at $1+\sin.\eta = 2$, et $1-\sin.\eta = \frac{1}{2}\omega\omega$; tum ergo erit $u = \frac{A}{a\omega}$, $V = \frac{AA}{2\alpha\,a^3\,\omega\omega}$ et $V' = \frac{AA}{\alpha\,a^3\,\omega^3}$.

§. 23. Sumamus nunc angulum Loxodromiae eſſe rectum, quo corpus vel in aequatore vel in quouis circulo aequatori parallelo movetur, cuius diſtantia ab aequatore angulo η indi-

indicatur; tum igitur erit $n = \infty$, hincque celeritas $u = \frac{c}{\alpha \, cof. \eta}$, quae ergo erit conſtans ob angulum η conſtantem; tum vero vires erunt

$$V = \frac{c\,c}{\alpha\, a^3\, cof.\eta^2 \sqrt{2(1+ſin.\eta)}} \text{ et } V' = \frac{c\,c}{\alpha\, a^3\, cof.\eta^2 \sqrt{2(1-ſin.\eta)}},$$

quae ergo etiam ambae erunt conſtantes.

§. 24. Videamus vero etiam, quomodo in genere vires futurae ſint comparatae, quando corpus iam proxime ad polum acceſſerit ita vt ſit $\eta = 90° - \omega$; tum autem erit celeritas $u = \frac{c\sqrt{(1+nn)}}{n\,a\,\omega}$, atque vires

$$V = \frac{(1+nn)\,c\,c}{\alpha\, n\, n\, a^3\, \omega\, \omega} \text{ et } V' = \frac{(1+nn)\,c\,c}{\alpha\, n\, n\, a^3\, \omega^3};$$

vnde patet, vim V infinities eſſe minorem quam alteram V′, ita vt corpus a ſola vi V′ vrgeri cenſeri queat, et quia hic ω exprimet diſtantiam corporis a polo C′, vis iſta reciproce erit cubo huius diſtantiae proportionalis, corpus autem iam circa polum C′ ſpiralem logarithmicam deſcribet, quae vtique talem vim centripetam poſtulat.

§. 25. Superfluum foret plures caſus euoluere, quandoquidem inde nullae expreſſiones elegantes et attentione dignae forent exſpectandae; imprimis enim mihi erat propoſitum oſtendere, ſi corpus in quacunque curua non in eodem plano ſita moueri debeat, ſemper duas vires centripetas aſſignari poſſe, quae adeo ad data duo centra virium diriguntur, ita vt corpus ab iſtis viribus ſollicitatum per ipſam curuam propoſitam promoueatur.

DE MOTV TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM SVPER EADEM LINEA RECTA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 12 *Decemb.* 1776.

§. 1.

Hoc argumentum continet ſine dubio caſum ſimpliciſſimum celeberrimi illius problematis, quo motus trium corporum ſe inuicem attrahentium inueſtigandus proponitur. Quamobrem ſi praeſens quaeſtio, qua tria illa corpora ſuper eadem linea recta moueri ſumuntur, omnem ſagacitatem Geometrarum eludit, atque adeo vires analyſeos ſuperare videtur, nullo certe modo problematis illius generalis ſolutio ſperari poterit. Hanc ob rem haud inutile erit, iſtum caſum ſimpliciſſimum accuratius euoluere, atque omnes difficultates, quae eius ſolutionem impediunt, omni adhibita attentione perpendere, quo clarius appareat, quanta adhuc analyſeos incrementa deſiderentur, antequam problematis generalis ſolutio cum ſucceſſu ſuſcipi queat.

§. 2. Sit igitur O V linea recta, ſuper qua tria corpora A B C ſe inuicem attrahentia moueantur, quorum maſſas per

per easdem litteras A, B, C indicemus. Iam in illa recta accipiatur pro lubitu punctum fixum O, a quo ad quoduis tempus distantias illorum corporum inuestigari oporteat. Elapso igitur tempore quocunque $= t$, vocentur istae distantiae $OA = x$, $OB = y$, et $OC = z$, vbi quidem assumimus esse $y > x$ et $z > y$, sicque binorum corporum A et B distantia erit $AB = y - x$, distantia vera $AC = z - x$, et distantia $BC = z - y$, quarum distantiarum quadratis vires, quibus bina horum corporum se mutuo attrahunt, reciproce proportionales statuuntur. Hinc ergo corpus A a corpore B trahitur vi $= \frac{B}{(y-x)^2}$ atque a C vi $= \frac{C}{(z-x)^2}$. Deinde vero corpus B ad A trahitur vi $= \frac{A}{(y-x)^2}$ et ad C vi $= \frac{C}{(z-y)^2}$. Denique corpus C trahitur ad A vi $= \frac{A}{(z-x)^2}$ et ad B vi $= \frac{B}{(z-y)^2}$. Tab. III. Fig. 3.

§. 3. Ex his igitur viribus secundum principia motus orientur tres sequentes aequationes:

I. Pro motu corporis A

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = + \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2}.$$

II. Pro motu corporis B

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = - \frac{A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}.$$

III. Pro motu corporis C

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = - \frac{A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2};$$

atque in his tribus aequationibus omnia continentur, quibus motus horum trium corporum determinatur. Vbi imprimis notari oportet, has formulas tam diu tantum valere, quam diu fuerit $y > x$ et $z > y$, veluti figura ostendit. At vero si nunc fuerit $y > x$, in motus continuatione interuallum $AB = y - x$ eousque tantum imminui potest, quoad corpora A et B ad contactum

tactum perueniant: ſtatim vero atque hoc contigerit, colliſio fiet, qua totus motus aliam indolem accipiet, prouti corpora fuerint elaſtica nec ne, qui effectus neutiquam in noſtris formulis continetur; vnde euidens eſt, motum in his formulis contentum diutius durare non poſſe, quam donec duo horum corporum ad contactum peruenerint.

§. 4. Statim autem patet, ob ternas diſtantias variabiles x, y & z, quibuscum etiam variabilitas temporis coniungi debet, nullam harum trium aequationum per ſe integrationem admittere poſſe. Per certas autem combinationes aequationes inde integrabiles deriuari poſſunt, quarum praecipua eſt haec: I. A + II. B + III. C, quae praebet hanc aequationem:

$$\frac{\mathrm{A}\,\partial\partial x + \mathrm{B}\,\partial\partial y + \mathrm{C}\,\partial\partial z}{\partial t^2} = 0$$

quae ducta in ∂t et integrata praebet

$$\mathrm{A}\,\partial x + \mathrm{B}\,\partial y + \mathrm{C}\,\partial z = \alpha\,\partial t$$

hincque denuo integrando

$$\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{C}\,z = \alpha\,t + \beta,$$

vbi litterae α et β denotant conſtantes per geminam integrationem ingreſſas.

§. 5. Haec autem aequatio oſtendit, commune centrum grauitatis trium corporum noſtrorum motu vniformi ſuper recta O V proferri. Quod ſi enim hoc tempore commune centrum grauitatis corporum A, B et C ſtatuatur in puncto G, eiusque diſtantia ab O vocetur O G $= v$, ex natura centri grauitatis notum eſt fore

$$\mathrm{A}.x + \mathrm{B}.y + \mathrm{C}.z = (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C})\,v.$$

Hinc igitur erit

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C})\,v = \alpha\,t + \beta;$$

vnde

vnde cum celeritas progreſſiua iſtius centri grauitatis ſit $= \frac{\partial v}{\partial t}$, erit iſta celeritas $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha}{A+B+C}$, ideoque conſtans. Vnde manifeſtum eſt, quomodocunque tria corpora inter ſe moueantur, eorum comune centrum grauitatis G perpetuo motu vniformi proferri, niſi forte eueniat, vt prorſus quieſcat, quod fiet, ſi fuerit $\alpha = 0$.

§. 6. Deinde etiam alia aequatio integrabilis ex tribus inuentis formari poteſt, ope huius combinationis:

$$\text{I. } A\,\partial x + \text{II. } B\,\partial y + \text{III. } C\,\partial z,$$

quando quidem hinc ſequens aequatio naſcetur:

$$\frac{A\partial x\partial\partial x + B\partial y\partial\partial y + C\partial z\partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{AB(\partial x - \partial y)}{(y-x)^2} + \frac{AC(\partial x - \partial z)}{(z-x)^2} + \frac{BC(\partial y - \partial z)}{(z-y)^2}$$

cuius integrale manifeſto colligitur eſſe

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{2\partial t^2} = \frac{AB}{y-x} + \frac{AC}{z-x} + \frac{BC}{z-y} + \Delta.$$

§. 7. Haec aequatio continet principium foecundiſſimum virium viuarum, vel etiam minimae actionis. Cum enim $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis A, $\frac{\partial y}{\partial t}$ celeritatem corporis B, et $\frac{\partial z}{\partial t}$ celeritatem corporis C, quibus corpora a puncto fixo O recedunt, vires viuae horum corporum erunt: primi $A = \frac{A\partial x^2}{\partial t^2}$, ſecundi $B = \frac{B\partial y^2}{\partial t^2}$ et tertii $C = \frac{C\partial z^2}{\partial t^2}$; inde aequatio modo inuenta nobis declarat, ſummam virium viuarum ſemper aequari huic formulae:

$$\frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y} + \Delta;$$

quae ergo quantitas eatenus increſcit, quatenus diſtantiae binorum corporum fiunt minores; dum contra, ſi corpora a ſe invicem recedant, ſumma virium viuarum diminuitur.

§. 8. Duas igitur iam nacti ſumus aequationes integratas, quarum prior adeo duplicem integrationem admiſit: vnde ſi quis inſuper vnicam aequationem integratam eruere poſſet, is certe plurimum praeſtitiſſe eſſet cenſendus, quanquam tractatio harum aequationum differentialium primi gradus adhuc maximis difficultatibus foret inuoluta, ita vt etiam tum vix vlla ſolutio idonea expectari poſſet. Quantumuis autem Geometrae in hac inueſtigatione elaborauerint, nulla tamen etiamnunc aequatio integrabilis deduci potuit. Interim tamen ſequenti modo aequationem maxime memorabilem deducere licet, vnde haud parum lucis expectari poterit.

§. 9. Euoluamus ſcilicet hanc combinationem: I. $Ax+$ II. $By+$ III. Cz, quae dabit hanc aequationem:

$$\frac{Ax\partial\partial x+By\partial\partial y+Cz\partial\partial z}{\partial t^2} = -\frac{AB}{y-x}-\frac{AC}{z-x}-\frac{BC}{z-y}.$$

Ante autem per integrationem inuenimus

$$\frac{A\partial x^2+B\partial y^2+C\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{y-x}+\frac{2AC}{z-x}+\frac{2BC}{z-y}+\Delta,$$

vnde ſi has duas aequationes inuicem addamus, ob

$$x\partial\partial x+\partial x^2 = \partial.x\partial x = \tfrac{1}{2}.\partial\partial.xx,$$

ſimilique modo ob

$$y\partial\partial y+\partial y^2 = \tfrac{1}{2}\partial\partial.yy \text{ et}$$
$$z\partial\partial z+\partial z^2 = \tfrac{1}{2}\partial\partial.zz,$$

naſcetur ſequens aequatio maxime memorabilis:

$$\frac{A.\partial\partial.xx+B.\partial\partial.yy+C.\partial\partial.zz}{2\partial t^2} = \frac{AB}{y-x}+\frac{AC}{z-x}+\frac{BC}{z-y}+\Delta.$$

Neque tamen etiamnunc patet, qualis fructus hinc percipi queat, quoniam integrale membri dextri, ſi per ∂t multiplicetur, nullo modo ſperari poteſt.

§. 10. Quoniam autem iam inuenimus centrum grauitatis commune trium noſtrorum corporum vniformiter in directum

rectum progredi, vnde ad quoduis tempus eius ſitum ſeu diſtantiam $OG = v$ facillime aſſignare licebit, hoc obſeruato ſufficiet binas tantum diſtantias inter corpora noſſe, quo pacto tota inueſtigatio ad pauciores quantitates variabiles reducetur. Si enim ponamus diſtantiam $AB = p$ et diſtantiam $BC = q$, ita vt ſit $y - x = p$ et $z - y = q$, erit $z - x = p + q$. Deinde ob $y = x + p$ et $z = x + p + q$, tres aequationes primo inuentae has induent formas:

I. $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{B}{pp} + \frac{C}{(p+q)^2}$;

II. $\frac{\partial\partial x + \partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{A}{pp} + \frac{C}{qq}$;

III. $\frac{\partial\partial x + \partial\partial p + \partial\partial q}{\partial t^2} = -\frac{A}{(p+q)^2} - \frac{B}{qq}$;

vnde ſi prima a ſecunda, tum vero ſecunda a tertia ſubtrahatur, impetrabuntur binae ſequentes aequationes pro definiendis ad quoduis tempus t binis nouis variabilibus p et q:

I. $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{qq} - \frac{C}{(p+q)^2}$;

II. $\frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(p+q)^2} - \frac{(B+C)}{qq}$.

§. 11. Quoniam primo inuenimus eſſe

$$Ax + By + Cz = \alpha t + \beta,$$

ſi loco y et z valores ſupra aſſignatos ſubſtituamus, habebimus

$$(A + B + C)x + (B + C)p + Cq = \alpha t + \beta.$$

Per centrum autem grauitatis G reperta eſt haec aequatio:

$$(A + B + C)v = \alpha t + \beta,$$

vnde tres quantitates x, y et z definire poterimus; erit ſcilicet

$$x = v - \frac{(B+C)p - Cq}{A+B+C},$$

hincque porro fiet

$$y = v + \frac{Ap - Cq}{A+B+C} \text{ et}$$

$$z = v + \frac{Ap + (A+B)q}{A+B+C}.$$

§. 12. Quia centrum grauitatis G vel quieſcit vel vniformiter in directum progreditur, poſteriore caſu, ſi toti ſyſtemati motus aequalis et contrarius ei, quo centrum grauitatis procedit, imprimi concipiatur, centrum grauitatis ad quietem redigetur. Quare cum nihil impediat, quominus punctum fixum O in ipſo centro grauitatis G conſtituamus, ponamus $v = 0$, eritque multo ſimplicius:

$$x = \frac{-(B+C)p - Cq}{A+B+C} = GA,$$
$$y = \frac{Ap - Cq}{A+B+C} = GB,$$
$$z = \frac{Ap + (A+B)q}{A+B+C} = GC,$$

Sicque ſimulac quantitates p et q aſſignare licuerit, etiam ſingulorum corporum loca innoteſcent.

§. 13. Hinc etiam aequationem, quam ſupra integrare licuit, quae erat

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta,$$

ad iſtum caſum accommodare licebit. Ponamus autem breuitatis gratia $A + B + C = \Sigma$, eritque

$$A\partial x^2 = \frac{A}{\Sigma^2}(B^2\partial p^2 + 2BC\partial p(\partial p + \partial q) + C^2(\partial p + \partial q)^2),$$
$$B\partial y^2 = \frac{B}{\Sigma^2}(A^2\partial p^2 - 2AC\partial p\partial q + C^2\partial q^2),$$
$$C\partial z^2 = \frac{C}{\Sigma^2}(A^2(\partial p + \partial q)^2 + 2AB\partial q(\partial p + \partial q) + B^2\partial q^2),$$

quae tres formulae in vnam ſummam collectae dabunt:

$$\frac{1}{\Sigma^2}\left\{\begin{matrix} +AB(A+B)\partial p^2 + AC(A+C)(\partial p + \partial q)^2 \\ +BC(B+C)\partial q^2 + 2ABC(\partial p + \partial q)^2 \end{matrix} - 2ABC\partial p\partial q\right\},$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{\Sigma}(AB\partial p^2 + BC\partial q^2 + AC(\partial p + \partial q)^2),$$

quo valore ſubſtituto aequatio illa integrata transmutabitur in hanc formam:

$$\frac{AB\partial p^2 + BC\partial q^2 + AC(\partial p + \partial q)^2}{(A+B+C)\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta.$$

§. 14.

§. 14. Quanquam haec aequatio ſatis eſt concinna et elegans, neutiquam tamen vlla via patet, inde ſolutionem quaeſtionis deriuandi, ita vt iſta quaeſtio merito profundiſſimae indaginis ſit cenſenda, et quicunque ſtudium et operam in his aequationibus reſoluendis conſumere voluerit, mox percipiet, ſe oleum et operam perdidiſſe; vnde manifeſto liquet, quid de iis ſit iudicandum, qui ſe iactant, in ſolutione problematis generalis de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium ſatis felici cum ſucceſſu elaboraſſe.

§. 15. Praecipua cauſa harum difficultatum in eo poſita eſſe videtur, quod iſta quaeſtio adhuc nimis eſt generalis, quoniam ad maſſas trium corporum quascunque atque ad motus quoscunque, qui iis imprimi potuerunt, extenditur. Datur enim vtique caſus maxime ſpecialis, quo motum horum trium corporum reuera aſſignare licet; ſemper enim eiusmodi motum in his corporibus concipere datur, vt binae diſtantiae p et q perpetuo eandem inter ſe rationem ſervent, ad quem caſum euoluendum ponatur $q = np$, ac duae aequationes §. 10. datae ſequentem formam induent:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{p\,p} + \frac{C}{n\,n\,p\,p} - \frac{C}{(1+n)^2\,p\,p};$$

$$\text{II.}\quad \frac{n\,\partial\,\partial\,p}{\partial t^2} = \frac{A}{p\,p} - \frac{A}{(1+n)^2\,p\,p} - \frac{(B+C)}{n\,n\,p\,p}.$$

§. 16. Statim autem hic perſpicitur, eiusmodi relationem inter numerum n et maſſas A, B, C exiſtere poſſe, vt hae duae aequationes euadant identicae, id quod eueniet, ſi membrum dextrum prius per n multiplicatum aequale ſtatuatur poſteriori, ex quo naſcetur haec aequatio:

$$-n(A+B) + \frac{C}{n} - \frac{nC}{(1+n)^2} = A - \frac{A}{(1+n)^2} - \frac{(B+C)}{n\,n},$$

vnde numerum n per reſolutionem elicere licebit; haec autem

aequatio ſtatim contrahitur in hanc formam:

$$-n(A+B)+\frac{(1+2n)C}{n(1+n)^2}=\frac{(2n+nn)A}{(1+n)^2}-\frac{(B+C)}{nn},$$

quae ducta in $n^2(1+n)^2$ a fractionibus liberabitur, eritque

$$-(A+B)n^3(1+n)^2+Cn(1+2n)=An^2(2n+nn)$$
$$-(B+C)(1+n)^2,$$

in qua aequatione incognita n ad quintam poteſtatem aſſurgit, ideoque difficillimam reſolutionem poſtulat. Notetur autem hanc aequationem ſecundum litteras A, B et C diſpoſitam fieri

$$An^3(3+3n+nn)-B(1+n)^2(1-n^3)-C(1+3n+3nn)=0.$$

Certum autem eſt hanc aequationem vnam ad minimum habere radicem realem, quae ſi fuerit poſitiua, ſolutionem praebet deſideratam. At quia hinc coëfficiens ſupremi termini fit $A+B$, ideoque ſemper poſitiuus, terminus autem abſolutus eſt $=(B+C)$, ideoque ſemper negatiuus, id indicium eſt, iſtam aequationem certe habere radicem realem poſitiuam, qua ergo negotium noſtrum conficietur.

§. 17. Caſus hic imprimis notatu dignus occurrit, quo ambo corpora extrema A et C ſtatuuntur inter ſe aequalia, poſito enim $C=A$, aequatio habebit hanc formam:

$$A(n-1)(n^4+4n^3+7nn+4n+1-B(n+1)^2(1-n^3)=0,$$

quae manifeſto habet factorem $n-1$, ita vt ſit $n=1$ et $q=p$; hoc ergo caſu, ſi modo ambo corpora extrema a medio fuerint aequaliter remota et aequales motus acceperint, tum perpetuo a corpore medio aequaliter diſtabunt, et motu ſatis regulari eo pertingent. Poſtquam autem illam aequationem per $n-1$ diuiſerimus, prodit iſta:

$$A(n^4+4n^3+7nn+4n+1)+B(n+1)^2(nn+n+1)=0,$$

cuius nullam amplius radicem poſitiuam eſſe poſſe manifeſtum eſt. §. 18.

§. 18. Inuento autem valore idoneo pro littera n, quoniam ambae aequationes principales identicae euadunt, si ponamus $-A-B+\frac{C}{nn}-\frac{C}{(1+n)^2}=N$, totus motus definiri debebit ex hac aequatione: $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2}=\frac{N}{pp}$, quae ducta in ∂p et integrata dat $\frac{\partial p^2}{2\partial t^2}=-\frac{N}{p}+\frac{N}{a}$; vbi cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis, euidens est, corpus fuisse in quiete vbi fuerit $p=a$. Cum igitur sit $\frac{\partial p}{\partial t\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{N(p-a)}}{ap}$, inde colligitur

$$\partial t\sqrt{2N}=\frac{\partial p\sqrt{ap}}{\sqrt{(p-a)}}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(pp-ap)}},$$

quae per logarithmos facile integratur. Sin autem quantitas N fuerit negatiua, puta $N=-M$, aequatio erit

$$\partial t\sqrt{2M}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}},$$

cuius integratio per arcus circulares absoluitur. Facile autem ostendi potest, valorem N semper esse negatiuum; si enim foret positiuus, quia motus initio fuerat $p=a$, sequeretur deinceps distantiam p augeri, seu ex formula $\sqrt{(p-a)}$ sequeretur, deinceps fieri $p>a$, quod est absurdum.

§. 19. Considerabimus casum supra memoratum quo $C=A$ et $n=1$, ideoque $q=p$; aequatio igitur motum definiens, ob $N=-B-\frac{A}{4}$ ideoque negatiuum, et $M=B+\frac{1}{4}A$, erit

$$\partial t\sqrt{(2B+\tfrac{1}{2}A)}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}}.$$

Cum igitur sit

$$\partial.\sqrt{(ap-pp)}=\frac{\frac{1}{2}a\partial p-p\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}},\text{ erit}$$

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}=\frac{\frac{1}{2}a\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}-\partial.\sqrt{(ap-pp)},$$

vnde integrando erit

$t\sqrt{}$

$$t\sqrt{\frac{2B+\frac{1}{2}A}{a}} = \int \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} - \sqrt{(ap-pp)}.$$

Eſt vero

$$\int \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} = a\,A\,\text{ſin.}\,\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)},$$

ita vt habeamus:

$$t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(2B+\frac{1}{2}A)}}\,(a\,A\,\text{ſin.}\,\sqrt{\tfrac{p}{a}} - \sqrt{ap-pp}).$$

Quoniam autem caſus quo $q = np$ vnicus eſt, quem etiam nunc reſoluere licet, is vtique meretur vt eius ſolutionem clarius ob oculos ponamus.

EVOLVTIO CASVS

quo binae diſtantiae A B et B C perpetuo eandem inter ſe rationem conſeruant.

§. 20. Cum poſuerimus $AC = p$ et $BC = q$, ſtatuamus, vt modo fecimus, $q = np$, ac vidimus, hunc numerum n ex iſta aequatione definiri debere:

$$An^3(nn+3n+3) - B(1+n)^2(1-n^3) - C(1+3n+3nn) = 0,$$

quae ſecundum poteſtates ipſius n diſpoſita hanc formam accipit:

$$(A+B)n^5 + (3A+2B)n^4 + (3A+B)n^3 - (3C+B)nn - (3C+2B)n - B - C = 0,$$

quae, cum ſit ordinis quinti, et termini contrariis ſignis affi-ciantur, ſemper vnam habebit radicem realem poſitiuam, quae ergo ad noſtrum inſtitutum erit accommodata, propterea quod diſtantia $BC = q$ per hypotheſin eſt poſitiua.

§. 21.

§. 21. Inuento autem tali valore idoneo pro n, quaeratur quantitas M, vt ſit $M = A + B - \frac{C}{nn} + \frac{C}{(1+n)^3}$. Cum igitur ex ſuperiore aequatione ſit

$$B = \frac{An^3(nn+3n+3) - C(1+3n+3nn)}{(1+n)^2(1-n^3)},$$

hoc valore introducto erit

$$M = \frac{A(1+2n+nn+2n^3+n^4)}{(1+n)^2(1-n^3)} - \frac{C(1+2n+nn+2n^3+n^4)}{nn(1+n)^2(1-n^3)},$$

ſiue

$$M = \frac{(Ann-C)(1+2n+nn+2n^3+n^4)}{nn(1+n)^2(1-n^3)},$$

qui valor, cum vt iam obſeruauimus ſemper debeat eſſe poſitiuus, hinc concludere licet, quoties fuerit $Ann > C$, toties eſſe debere $n < 1$; contra vero ſi fuerit $Ann < C$, tum ſemper fore $n > 1$.

§. 21. His circa numerum M obſeruatis, ſupra inuenimus hanc aequationem differentialem inter p et t

$$\partial t \sqrt{2M} = \frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}};$$

vnde cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem, qua interuallum $AB = p$ creſcit, erit iſta celeritas $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sqrt{2M(ap-pp)}}{p\sqrt{a}}$. Sin autem diſtantiae inter corpora decreſcant, quoniam extractio radicis quadratae huc perduxit, ſcribi debet

$$\partial t \sqrt{2M} = -\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}}.$$

Vtroque caſu ergo diſcimus, vbi fiet $p = a$ ideoque $q = na$, tum vtramque corporis celeritatem fieri $= 0$. At ſi eueniat $p = 0$, id quod in ipſo corporum contactu contingit, tum vtramque celeritatem fieri infinitam. Verum, ob extenſionem corporum, fieri nequit, vt haec tria corpora in vnum punctum conueniant.

§. 23. Denuo autem iſtam aequationem differentialem integrare licebit; cum enim ſit

$$\frac{\partial t \sqrt{2M}}{\sqrt{a}} = \frac{p\,\partial p}{\sqrt{(ap - pp)}} = -\sqrt{(ap - pp)} + \frac{\frac{1}{2} a\,\partial p}{\sqrt{(ap - pp)}},$$

erit integrale

$$t\sqrt{\tfrac{2M}{a}} = \alpha - \sqrt{(ap - pp)} + a \,\mathrm{A\,ſin.}\, \sqrt{\tfrac{p}{a}},$$

in qua formula ſigna erunt mutanda, ſi diſtantia p decreſcat. Verum ipſe calculus iſtud diſcrimen innuit: ſi enim tempus t computemus ab eo ſtatu, quo fuerat $p = a$, atque adeo celeritas concurſus nulla, conſtantem α hinc definire licet; fiet enim $0 = \alpha + \frac{a\pi}{2}$, vnde fit $\alpha = -\frac{a\pi}{2}$. Quoniam autem ab hoc ſtatu corpora ad ſe mutuo accedunt, mutatis ſignis erit

$$t\sqrt{\tfrac{2M}{a}} = \tfrac{a\pi}{2} + \sqrt{(ap - pp} - a \,\mathrm{A\,ſin.}\, \sqrt{\tfrac{p}{a}},$$

vnde patet, corpora inuicem eſſe coitura, ponendo $p = 0$, elapſo tempore $t = \frac{1}{2}\pi \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}}$.

§. 24. Quo hanc expreſſionem propius ad vſum accommodemus, introducamus angulum Φ, cuius ſinus ſit $\sqrt{\frac{p}{a}}$, vnde fiet $p = a$ ſin. Φ^2 et $q = n\,a$ ſin. Φ^2; tum autem erit

$$\sqrt{(ap - pp)} = a\sqrt{\text{ſin. }\Phi \text{ coſ. }\Phi} = \tfrac{1}{2} a \text{ ſin. } 2\Phi.$$

Hinc igitur aequatio noſtra integralis erit

$$t\sqrt{\tfrac{2M}{a}} = \tfrac{a\pi}{2} + \tfrac{a}{2} \text{ ſin. } 2\Phi - a\Phi, \text{ ideoque}$$

$$t = \tfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}} \left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } 2\Phi - \Phi\right).$$

Quod ſi hic porro ponamus $\frac{\pi}{2} - \Phi = \frac{1}{2}\omega$, erit ſin. $2\Phi =$ ſin. ω, hocque valore ſubſtituto fiet

$$t = \tfrac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2M}} (\omega + \text{ſin. } \omega).$$

§. 25.

§. 25. Ecce igitur ſolutio huc eſt reducta, vt ad datum tempus t quaeri debeat angulus ω, ita vt ſit

$$\omega + \text{ſin. } \omega = \frac{2t\sqrt{2M}}{a\sqrt{a}},$$

quo inuento, cum ſit $\Phi = 90^\circ - \frac{1}{2}\omega$, ideoque ſin. $\Phi = \text{coſ.}\frac{1}{2}\omega$, pro hoc tempore reperietur diſtantia

$$AB = p = a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\omega^2 = \tfrac{1}{2}a(1 + \text{coſ. }\omega), \text{ et}$$
$$q = \tfrac{1}{2}na(1 + \text{coſ. }\omega).$$

CONSIDERATIO CASVS
quo maſſa vnius corporis plane euaneſcit.

§. 26. Quoniam maſſae trium corporum praecipuam cauſſam continent omnium difficultatum, quibus haec quaeſtio premitur, non immerito ſuſpicari licet, has difficultates maximam partem diſſipari debere, ſi vni trium corporum tribuatur maſſa euaneſcens, ita vt ab hoc corpore motus duorum reliquorum plane non turbetur, quae ergo inter ſe motu maxime regulari ferentur, quaſi tertium corpus plane abeſſet. Poſito autem $C = 0$, diſtantiis vero vt ſupra $AB = p$ et $BC = q$, pro motu determinando habebuntur duae ſequentes aequationes: I. $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp}$ et II. $\frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}$.

§. 27. Hic ſtatim aequationem priorem integrare licet, quae poſito breuitatis gratia $A + B = m$ fit

$$\frac{\partial p^2}{2\partial t^2} = +\frac{m}{p} - \frac{m}{a} = \frac{m(a-p)}{ap},$$

vnde fit $\partial t^2 = \frac{ap\,\partial p^2}{2m(a-p)}$, qui valor ſi in altera aequatione ſubſtituatur, prodibit aequatio binas tantum variabiles p et q inuoluens, a cuius ergo reſolutione totum negotium pendebit. Cum autem in altera aequatione elementum ∂t pro conſtante

ſtante ſit aſſumtum, quo haec conſideratio exuatur, multiplicetur aequatio per ∂q, et repraeſentari poterit ſub hac forma:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \partial \cdot \frac{\partial q^2}{\partial t^2} = \frac{A \partial q}{pp} - \frac{B \partial q}{qq} - \frac{A \partial q}{(p+q)^2},$$

vnde, facta ſubſtitutione, inter quantitates p et q obtinebitur iſta aequatio:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \partial \cdot \frac{2m(a-p)\partial q^2}{ap\partial p^2} = \frac{A \partial q}{pp} - \frac{B \partial q}{qq} - \frac{A \partial q}{(p+q)^2}.$$

Interim tamen haec aequatio, quomodocunque tractetur, omne ſtudium in ea reſoluenda fruſtra impendi deprehendetur, ſolo caſu excepto, quo ambae quantitates p et q conſtantem inter ſe tenent rationem. Si enim ponamus $q = np$, ob $\partial q = n\partial p$, aequatio hanc induet formam:

$$\tfrac{1}{2}\partial \cdot \frac{2mnn(a-p)}{ap} = \frac{nA\partial p}{pp} - \frac{B\partial p}{npp} - \frac{nA\partial p}{pp(1+n)^2},$$

membrum vero ſiniſtrum euolutum dat $-\frac{2mnn\partial p}{pp}$, vnde totam aequationem per $\frac{\partial p}{pp}$ diuidendo prodit

$$-mnn = nA - \frac{B}{n} - \frac{nA}{(1+n)^2},$$

quae nullam amplius variabilem continet, ſed ipſi numero n inueniendo inſeruit. Facile autem patet ob $m = A + B$, eandem haberi aequationem, quam iam ſupra pro numero n definiendo dedimus, ſi quidem ponatur $C = 0$, vnde huic caſui immorari ſuperfluum foret.

§. 28. Euoluamus autem in genere membrum ſiniſtrum, ac ſumendo elementum ∂p conſtans, haec aequatio euoluta emerget:

$$\frac{2m(a-p)\partial\partial q}{ap\partial p^2} - \frac{m\partial q}{pp\partial p} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2},$$

pro qua reſoluenda nulla plane via patet, atque omnia artificia, quae adhuc ſunt inuenta, nequicquam in ſubſidium vocantur. Quin etiam, quamuis ſumamus $a = \infty$, quo caſu aequatio

aequatio fit homogenea, nihil tamen praeſtari poſſe deprehendemus; aequatio autem habebit hanc formam:

$$\frac{2m\,\partial\partial q}{p\,\partial p^2} - \frac{m\,\partial q}{p\,p\,\partial p} = \frac{A}{p\,p} - \frac{B}{q\,q} - \frac{A}{(p+q)^2}.$$

Facile enim intelligitur, ſi haec aequatio vires noſtras ſuperet, prioris ſolutionem fruſtra ſuſcipi.

§. 29. Quoniam haec poſtrema aequatio eſt homogenea, eam more ſolito tractemus, ponendo $q = up$ et $\partial q = s\partial p$, vnde ſtatim fit $\frac{\partial p}{s} = \frac{\partial u}{s-u}$. Facta autem hac ſubſtitutione ipſa aequatio induet ſequentem formam:

$$\frac{2m\,\partial s}{p\,\partial p} - \frac{m\,s}{p\,p} = \frac{A}{p\,p} - \frac{B}{u\,u\,p\,p} - \frac{A}{p\,p\,(1+u)^2},$$

quae multiplicata per $p\,\partial p$ praebet

$$2m\,\partial s = \frac{\partial p}{p}\left(m\,s + A - \frac{B}{u\,u} - \frac{A}{(1+u)^2}\right),$$

vnde ſi loco $\frac{\partial p}{p}$ ſcribatur valor modo datus $\frac{\partial u}{s-u}$, per eumque diuidatur, peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{2m\,\partial s\,(s-u)}{\partial u} = m\,s + A - \frac{A}{(1+u)^2} - \frac{B}{u\,u},$$

vbi notetur eſſe $m = A + B$, quae quanquam eſt primi gradus et duas tantum variabiles s et u inuoluit, fruſtra tamen omnis labor in ea ſoluenda impendi videtur, vnde multo minus quicquam circa aequationem aliquanto generaliorem, in qua inerat conſtans a, ſperare licebit, niſi forte quis obiicere velit, ſi inſuper vel maſſa A vel B euaneſcens ſtatueretur, ſolutionem facile perfici poſſe, quod quidem per ſe eſt perſpicuum, neque hic efferri meretur.

SOLVTIO PROBLEMATIS MECHANICI.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 13 *Mart.* 1779.

§. 1.

Tab. III. Fig. 4. Conſidero hic duos cyclindros plano horizontali incumbentes O A *a* et in figura per circulos C A B et *c a b*, qui eorum baſes referant, repraeſentatos; tum vero concipio funiculum ſeu filum vtrique circumuolutum, quod vbi priorem in T deſerit, inde ad alterum porrigatur, quem in *t* contingat, hincque eius peripheriae per β et *b* applicetur. Quibus poſitis quaeſtio reſoluenda in hoc verſatur, vt poſtquam altervtri cylindro vel etiam vtrique motus quicunque fuerit impreſſus, continuatio huius motus per principia Mechanica determinetur; huiusmodi quidem quaeſtiones facile innumerabiles excogitari poſſunt, quae autem eatenus tantum attentione dignae ſunt cenſendae, quatenus ſolutiones concinnas et elegantes ſuppeditant, atque hoc reſpectu praeſens problema maxime memoratu dignum videtur.

§. 2. Ad hoc problema ſoluendum ponamus pro priore cylindro C A B eius radium C A $= a$, eius pondus ſeu maſſam $= m$, tum vero eius momentum inertiae reſpectu axis ſumptum $= n$, pro altero vero cylindro *c a b* ſit eius radius

c a

$c\,a = \alpha$, eius maſſa ſeu pondus $= \mu$, eiusque momentum inertiae $= \nu$, vbi cum momentum inertiae reperiatur, ſi ſingula maſſae elementa per quadrata diſtantiae ab axe multiplicentur, atque omnia haec producta in vnam ſummam colligantur, euidens eſt, ſi vniuerſa maſſa vtriusque cylindri per eius peripheriam eſſet diſtributa, tum futurum eſſe $n = m\,a\,a$ et $\nu = \mu\,\alpha\,\alpha$, quando autem maſſa per totum volumen eſt diffuſa, neceſſe eſt, vt fiat $n < m\,a\,a$ et $\nu < \mu\,\alpha\,\alpha$.

§. 3. Sumamus nunc elapſo tempore ab initio motus $= t$, ambos cylindros eum ſitum tenere, qui in figura repraeſentatur, atque ponamus diſtantias a puncto fixo O ſumptas $O\,A = x$, $O\,a = y$, praeterea vero ſtatuamus interuallum $A\,a = z$, ita vt ſit $y = x + z$. Nunc ante omnia conſiderari oportet portionem fili $T\,t$ a priore cylindro ad alterum porrecti, quae ſcilicet priorem cylindrum in T, alterum vero in t tangat; vnde ad baſin demittamus perpendicula $T\,P$ et $t\,p$: ponamus vero inclinationem huius lineae $T\,t$ ad horizontem eſſe $= \omega$, ductisque radiis $C\,T$ et $c\,t$, euidens eſt fore angulum $A\,C\,T = \omega$ et $\beta\,c\,t = \omega$, ſumpto ſcilicet β in ſummitate poſterioris cylindri, hincque colligimus interualla $A\,P = a$ ſin. ω et $a\,p = \alpha$ ſin. ω, tum vero perpendicula erunt

$$T\,P = a\,(1 - \text{cof. } \omega) \text{ et } t\,p = \alpha\,(1 + \text{cof. } \omega),$$

hinc igitur erit interuallum

$$P\,p = z - (a + \alpha) \text{ ſin. } \omega.$$

Deinde erit

$$t\,p - T\,P = \alpha - a + (a + \alpha) \text{ cof. } \omega.$$

§. 4. Hinc iam facile deducitur relatio inter ſpatium z et angulum ω, cum enim ſit tang. $\omega = \frac{t\,p - T\,P}{P\,p}$, erit valoribus

bus ſubſtitutis

$$\text{tang. } \omega = \frac{\alpha - a + (a+\alpha)\cos.\omega}{z - (a+\alpha)\sin.\omega} = \frac{\sin.\omega}{\cos.\omega},$$

vnde ſublatis fractionibus haec deducitur aequatio:

$$a + \alpha - (a - \alpha)\cos.\omega = z \sin.\omega.$$

Porro vero pro ipſo interuallo T t inueniendo notetur eſſe $\cos.\omega = \frac{P\,p}{T\,t}$, vnde colligitur

$$T\,t = \frac{P\,p}{\cos.\omega} = \frac{z - (a+\alpha)\sin.\omega}{\cos.\omega},$$

vel etiam, cum ſit $\sin.\omega = \frac{t\,p - T\,P}{T\,t}$, erit

$$T\,t = \frac{\alpha - a + (a+\alpha)\cos.\omega}{\sin.\omega}.$$

Cum iam ex praecedente aequatione ſit

$$a + \alpha = z \sin.\omega + (a - \alpha)\cos.\omega,$$

hoc valore ſubſtituto reperiemus

$$T\,t = z\cos.\omega - (a - \alpha)\sin.\omega.$$

§. 5. Perpendamus nunc etiam motum rotatorium vtriusque cylindri; hunc in finem ducantur radii horizontales C B et $c\,b$, atque ſumamus puncta, quae initio motus fuerant in B et b, nunc translata eſſe in S et s, ita vt motus rotatorius prioris cylindri factus ſit per angulum B C S $= s$ et poſterioris cylindri per angulum $b\,c\,s = \sigma$, quodſi iam pro ſtatu initiali ponamus longitudinem fili a puncto B ad punctum b porrecti fuiſſe $= f$, atque neceſſe eſt vt etiam nunc longitudo fili a puncto S vsque in s porrecti ſit $= f$, ſiue debet eſſe

$$SB + BA + AT + Tt + t\beta + \beta b - sb = f.$$

§. 6. Deſignemus igitur ſingulas has partes ſuis ſimbolis, et cum ſit arcus B S $= a\,s$; B A $= \frac{1}{2}\pi a$; A T $= a\,\omega$; $T\,t = z\cos.\omega - (a-\alpha)\sin.\omega$; $t\beta = \alpha\omega$; $\beta b = \frac{1}{2}\pi\alpha$ et $sb = \alpha\sigma$, habebimus hanc aequationem:

$$f =$$

$$f = a s + \tfrac{1}{2}\pi (a + \alpha) + \omega (\alpha + \alpha) - \alpha \sigma - (a - \alpha) \text{ſin. } \omega + z \text{ cof. } \omega.$$

Quare cum haec expreſſio perpetuo debeat manere eadem, eius differentiale debet euaneſcere; hincque nanciſcemur iſtam aequationem

$$0 = a\,\partial s - \alpha\,\partial \sigma + (a + \alpha)\,\partial \omega - (a - \alpha)\,\partial \omega \text{ cof. } \omega + \partial z \text{ cof. } \omega - z\,\partial \omega \text{ ſin. } \omega,$$

quae ob

$$z \text{ ſin. } \omega = a + \alpha - (a - \alpha) \text{ cof. } \omega$$

abit in iſtam formam ſimpliciſſimam

$$0 = a\,\partial s - \alpha\,\partial \sigma + \partial z \text{ cof. } \omega.$$

§. 7. His praeparatis principia motus in ſubſidia vocemus, et cum nulla alia adſit vis motum vtriusque cylindri ſollicitans praeter tenſionem fili T t, quam ſtatuamus $= \theta$, quippe qua prior cylindrus vrgetur in directione T t, poſterior vero in directione t T, ab hac igitur vi motus progreſſiuus prioris cylindri perinde afficietur, ac ſi centro C eſſet applicata; vnde cum motus progreſſiuus ſit horizontalis, quo iam ſpatium x eſt percurſum, pro hac directione vis θ praebet θ cof. ω, quae per maſſam m diuiſa praebet accelerationem, vnde oritur haec aequatio $\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = \frac{\theta \text{ cof. } \omega}{m}$, ſimilique modo pro altero cylindro, quia vis in plagam contrariam tendit, habebitur haec aequatio $\frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = -\frac{\theta \text{ cof. } \omega}{\mu}$, vbi elementum temporis ∂t ſumitur conſtans, hinc vim iſtam incognitam θ elidendo orietur $\frac{m \partial \partial x + \mu \partial \partial y}{\partial t^2} = 0$, vnde integrando colligitur

$$m\,\partial x + \mu\,\partial y = A\,\partial t,$$

quae ob $y = x + z$ tranſit in hanc

$$(m + \mu)\,\partial x + \mu\,\partial z = A\,\partial t.$$

§. 8. Contemplemur nunc etiam motum gyratorium vtriusque cylindri, et cum vis sollicitantis θ momentum respectu axis motus C sit $= a\theta$ motui aduersans, si per momentum inertiae diuidamus, habebimus hanc aequationem $\frac{\partial\partial s}{\partial t^2} = -\frac{a\theta}{n}$, similique modo pro altero cylindro, vbi vis motum promouet, habebimus $\frac{\partial\partial\sigma}{\partial t^2} = \frac{\alpha\theta}{\nu}$, vnde elidendo θ habebimus

$$\frac{\frac{n}{a}\partial\partial s + \frac{\nu}{\alpha}\partial\partial\sigma}{\partial t^2} = 0,$$

vnde integrando elicimus

$$\frac{n}{a}\partial s + \frac{\nu}{\alpha}\partial\sigma = B\,\partial t.$$

Praeterea vero insuper tertiam aequationem $a\theta$ liberam deducere licet, cum sit $\frac{\partial\partial s}{\partial\partial x} = -\frac{a\,m}{n\,\text{cos.}\,\omega}$. Sicque praeter binas aequationes ante inuentas ex principiis motus nacti sumus tres nouas aequationes, vnde totam solutionem petere debebimus.

§. 9. Has igitur aequationes hic coniunctim ante oculos ponamus, quae sunt

I. $z\,\text{sin.}\,\omega = a + \alpha - (a - \alpha)\,\text{cos.}\,\omega$,

II. $a\,\partial s - \alpha\,\partial\sigma + \partial z\,\text{cos.}\,\omega = 0$,

III. $(m + \mu)\,\partial x + \mu\,\partial z = A\,\partial t$,

IV. $\frac{n}{a}\partial s + \frac{\nu}{\alpha}\partial\sigma = B\,\partial t$,

V. $\frac{\partial\partial s}{\partial\partial x} = -\frac{a\,m}{n\,\text{cos.}\,\omega}$,

quae aequationes vtique sufficiunt, quandoquidem tantum sex quantitates variabiles occurrunt z, ω, s, σ, x et t.

§. 10. Vt iam calculum a differentialibus secundi gradus liberemus, quoniam elementum temporis ∂t constans est assumptum, vtamur sequentibus characteribus $\partial z = z'\,\partial t$;

∂x

$\partial x = x' \partial t$; $\partial s = s' \partial t$; $\partial \sigma = \sigma' \partial t$; vnde manente aequatione prima, reliquae reducentur ad sequentes formas

II. $a s' - \alpha \sigma' + z' \cos. \omega = 0$,

III. $(m + \mu) x' + \mu z' = A$,

IV. $\frac{n}{a} s' + \frac{\nu}{\alpha} \sigma' = B$,

V. $\frac{\partial s'}{\partial x'} = - \frac{a m}{n \cos. \omega}$.

Iam ex III. deducimus $x' = \frac{A - \mu z'}{m + \mu}$, hincque $\partial x' = - \frac{\mu \partial z'}{m + \mu}$. Porro vero ex IV. deriuamus $\sigma' = \frac{\alpha a B - \alpha n s'}{a \nu}$, qui valor in secunda substitutus dat

$$(\nu a a + n \alpha \alpha) s' + a \nu z' \cos. \omega - \alpha \alpha a B = 0,$$

quae differentiata dat

$(\nu a a + n \alpha \alpha) \partial s' = - \nu a \partial . z' \cos. \omega$, vnde fit

$\partial s' = - \frac{\nu a \partial . z' \cos. \omega}{\nu a a + n \alpha \alpha}$.

Consequenter quinta aequatio, quae est

$$n \partial s' \cos. \omega + m a \partial x' = 0,$$

transibit in hanc

$$\frac{\nu n a \cos. \omega \partial . z' \cos. \omega}{\nu a a + n \alpha \alpha} + \frac{\mu m a \partial z'}{m + \mu} = 0.$$

§. 11. Ponamus nunc breuitatis gratia

$$\frac{m \mu (\nu a a + n \alpha \alpha)}{n \nu (m + \mu)} = \lambda,$$

vt obtineamus hanc aequationem satis simplicem

$$\cos. \omega \partial . z' \cos. \omega + \lambda \partial z' = 0,$$

quae ducta in $2 z'$ et integrata praebet hanc aequationem integralem $z'^2 \cos. \omega^2 + \lambda z'^2 = \Delta^2$, vnde colligimus $z' = \frac{\Delta}{\sqrt{(\lambda + \cos. \omega^2)}}$. Sicque relationem sumus consecuti inter z' et ω, cum ante habuissemus relationem inter z et ω, vnde cum positum sit

$\partial z = z' \partial t$, etiam relationem inter tempus t et angulum ω definire poterimus; cum enim fit

$$z = -\frac{a + \alpha - (a - \alpha)\,cof.\,\omega}{sin.\,\omega},$$

erit differentiando

$$\partial z = -\frac{(a + \alpha)\,\partial\omega\,cof.\,\omega + (a - \alpha)\,\partial\omega}{sin.\,\omega^2} = z'\,\partial t,$$

vnde fit

$$\partial t = \frac{\partial\omega\,(a - \alpha - (a + \alpha)\,cof.\,\omega)\,\sqrt{(\lambda + cof.\,\omega^2)}}{\Delta\,sin.\,\omega^2},$$

vnde, conceſſa integratione, ex dato angulo ω tempus t, hincque viciſſim ad datum tempus t angulum ω aſſignare licebit.

§. 12. Hoc itaque modo problema noſtrum perfecte eſt ſolutum, namque ex angulo ω per primam aequationem ſtatim innoteſcit z, hincque porro ex tertia colligitur x; ſimili modo ex z deducimus etiam s, ex eoque porro reliquae quantitates y et σ; vbi notatu dignum vſu venit, quod tota ſolutio tandem ad formulas integrales non adeo complicatas fuerit perducta.

SUR

SUR
LE MOUVEMENT GYRATOIRE
D'UN CORPS ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

PAR
JACQUES BERNOULLI.

Préſenté à l'Académie le 8 Octobre 1787.

Troiſiéme Mémoire.

Dans les précédens Mémoires ſur cette matiére j'ai traité deux cas différens, où le corps, mû toûjours dans le même plan horizontal ou vertical, & doüé de ce qu'on appelle un *mouvement gyratoire*, ne décrivoit qu'une courbe à ſimple courbure. Il me reſte à examiner le cas, où le corps avec ſon fil A C toûjours tendu, & faiſant un angle aigu B A C quelconque avec la verticale A B, eſt animé d'un *mouvement turbinatoire* autour de cette verticale, & décrit par-conſéquent à-cauſe des extenſions & reſſerremens alternatifs du fil une courbe à double courbure. Mais je dois prévenir ici le lecteur, que peu ſatisfait moi-même de mes recherches, j'eſpere encore moins de le contenter parfaitement, & que malgré les reſtrictions que je donne dans la ſuite à mon problème, je n'oſe propoſer mes reflexions & leur réſultat que comme un eſſai ou une tentative pour exciter l'attention des Géomètres, qui pourroient trouver dans ce ſujet quelque attrait

Tab. III. Fig. 5.

attrait pour leurs méditations, & qui y porteroient plus de capacité à le manier que moi.

Tab. III. Fig. 6. §. 1. Soit la courbe rapportée à trois axes perpendiculaires entre eux, dont l'un A B ſoit vertical, & les deux autres A C, A E horizontaux; ſoyent nommées les coordonnées, paralléles à ces axes, $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$; l'élément de la courbe $Nn = \partial s$, l'élément du tems, ſuppoſé conſtant, $= \partial t$, la maſſe du corps en mouvement $= M$, l'eſpace décrit par la chute libre d'un corps dans l'eſpace d'une ſeconde $= g$. La longueur naturelle du fil $= a$, ſa longueur A N, quand le corps eſt en N, $= a + \zeta = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. La plus grande extenſion poſſible du fil étant $= \theta$, & le poids requis pour la produire $= P$, on aura la tenſion ou la force reſſerrante pour la longueur $a + \zeta = \frac{P\zeta}{\theta}$, que nous nommerons au commencement $= \Pi$. De plus, le rayon oſculateur en N étant $= \frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial\partial x + \partial\partial y^2 + \partial\partial z^2 - \partial\partial s^2)}}$, (voyez *Euleri methodus facilis omnia ſymptomata linearum curuarum non in eodem plano ſitarum inueſtigandi.* Diff. prior §. 9. in *Actis Acad. Scient. Petropol. pro Anno* 1782. *P. I.*) laquelle expreſſion je ferai $= R$, & la viteſſe du corps en N étant $= \frac{\partial s}{\partial t}$, on aura la force centrifuge dans ce même point $N = \frac{M}{R}\frac{\partial s^2}{\partial t^2}$, que je nommerai $= V$. Les trois forces qui agiſſent ſur le corps, ſont donc M, Π et V, qu'il faut réſoudre ſuivant la direction des trois axes principaux de la courbe. De plus, les forces qui naiſſent de M & de Π, devront être multipliées par $2g$; mais pour celles, qui proviendront de la décompoſition de V, cela ne ſera pas néceſſaire, puisque la viteſſe $\frac{\partial s}{\partial t}$ eſt ſuppoſée exprimée par le nombre de pieds, qu'elle peut faire parcourir au corps dans une ſeconde.

§. 2.

§. 2. Or la prémiére M agiſſant verticalement, n'a pas beſoin de décompoſition, & donne une force accélératrice $= + \frac{2gM}{M} = 2g$, dans le ſens de l'axe vertical.

§. 3. La ſeconde force Π étant décompoſée, donnera les trois forces $\frac{\Pi x}{a+\zeta}$, $\frac{\Pi y}{a+\zeta}$ & $\frac{\Pi z}{a+\zeta}$; & les trois forces accélératrices $\frac{2g\Pi x}{M(a+\zeta)}$, $\frac{2g\Pi y}{M(a+\zeta)}$, $\frac{2g\Pi z}{M(a+\zeta)}$; l'une pour la direction parallèle aux x, la ſeconde pour la direction parallèle aux y, & la troiſiéme pour la direction parallèle aux z. Mais comme toutes ces forces tendent à diminuer les coordonnées reſpectives, ces forces accélératrices ſeront, en remettant pour Π ſa valeur $\frac{P\zeta}{\theta}$, I. $-\frac{2gP\zeta x}{M\theta(a+\zeta)}$, II. $-\frac{2gP\zeta y}{M\theta(a+\zeta)}$, III. $-\frac{2gP\zeta z}{M\theta(a+\zeta)}$.

§. 4. Pour trouver la direction des forces, qui naiſſent de la décompoſition de V, on fera attention, que la force centrifuge agit toûjours dans la direction du rayon oſculateur, & chaque force qui en réſulte pour chaque axe, ſera $=$ V multiplié par le coſinus de l'angle formé par cet axe avec le rayon oſculateur. Or par le §. 18. de la Diſſertation citée de M. Euler, ce rayon fait avec l'axe des x un angle, dont le coſinus $= \frac{\partial p}{\sqrt{(\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2)}}$, avec celui des y un angle, dont le coſinus $= \frac{-\partial q}{\sqrt{(\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2)}}$, & avec celui des z un angle, dont le coſinus $= \frac{\partial r}{\sqrt{(\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2)}}$; dans leſquelles formules p eſt $= \frac{\partial x}{\partial s}$, $q = \frac{\partial y}{\partial s}$, & $r = \frac{\partial z}{\partial s}$. Donc on a

$$\partial p = \frac{\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s}{\partial s^2};$$

$$\partial q = \frac{\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s}{\partial s^2}; \text{ \&}$$

$$\partial r = \frac{\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s}{\partial s^2}:$$

car à cauſe de ∂t priſe conſtante, il n'eſt pas permis de ſuppoſer telle quelque autre variable. Delà, puisque

∂s

$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$, &

$\partial s \partial \partial s = \partial x \partial \partial x + \partial y \partial \partial y + \partial z \partial \partial z$,

on aura

le 1er cosinus $= \frac{\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s}{\partial s \sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$.

le 2^{e} cosinus $= \frac{-(\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s)}{\partial s \sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$.

le 3^{e} cosinus $= \frac{\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s}{\partial s \sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$.

§. 5. Quant aux signes, qu'il faudra mettre devant ces nouvelles forces, ils seront affirmatifs pour les cosinus négatifs, & négatifs pour les cosinus affirmatifs. Nos trois forces seront donc, en substituant pour V sa valeur $\frac{M \partial s^2}{R \partial t^2}$, & pour R la sienne

$$= \frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}},$$

I. $\frac{-M(\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$;

II. $\frac{-M(\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$;

III. $\frac{-M(\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$,

& chacune de ces forces étant divisée par M, donnera la force accélératrice respective.

§. 6. En ramassant donc maintenant les forces trouvées pour la direction de chaque axe des variables x, y, z, on aura ces trois équations fondamentales :

(A) $\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = 2g - \frac{2gP\zeta x}{M\theta(a+\zeta)} - \frac{(\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$.

(B) $\frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = - \frac{2gP\zeta y}{M\theta(a+\zeta)} - \frac{(\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$.

(C) $\frac{\partial \partial z}{\partial t^2} = - \frac{2gP\zeta z}{M\theta(a+\zeta)} - \frac{(\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$.

§. 7. Il seroit sans doute impossible de rien conclure de ces équations, bien loin de pouvoir les intégrer. Il faudra

dra donc maintenant au lieu des variables x, y, z, en introduire d'autres, qui ſoyent plus propres à nous donner une idée du mouvement en quéſtion, & qui, d'après les ſuppoſitions & les reſtrictions que nous faiſons, ſimplifieront les équations, & nous meneront peut-être à leur intégration, en nous indiquant les termes, qu'on pourra négliger comme infiniment-petits.

§. 8. La prémiére de ces variables ſera le rayon vecteur $a+\zeta$ lui-même, que nous ſavons déja être

$$= \sqrt{(x\,x+y\,y+z\,z)}.$$

Qu'on ſe répréſente enſuite un cercle vertical, dont le rayon $= 1$, ayant le point A pour centre, & paſſant par le rayon vecteur A N. Qu'on nomme l'arc de ce cercle, compris entre la verticale A B & le rayon A N $= \Phi$, on aura

$$x = (a+\zeta)\ \text{cof.}\ \Phi.$$

Qu'on ſe répréſente encore un ſecond cercle, dont le rayon $= 1$, perpendiculaire à la verticale A B, & dont le plan paſſe par le point N. Que l'arc de ce cercle, compris entre le point N & l'ordonnée P M prolongée, ſoit $= \omega$: on aura, (puisqne P N $= y\,y+z\,z = (a+\zeta)$ ſin. Φ),

$$y = (a+\zeta)\ \text{ſin.}\ \Phi\ \text{cof.}\ \omega,\ \&$$

$$z = (a+\zeta)\ \text{ſin.}\ \Phi\ \text{ſin.}\ \omega.$$

§. 9. En réfléchiſſant un peu ſur la nature de notre courbe, il eſt clair, que ſi le fil ne ſouffroit point d'extenſion, le corps décriroit en montant & en baiſſant alternativement une eſpèce de ſpirale, & il eſt probable, que la détermination de cette courbe ſurpaſſeroit déja toutes les forces de l'Analyſe. L'entrepriſe ſeroit donc à raiſon d'autant plus forte inutile, en faiſant entrer les extenſions du fil dans le calcul.

Je ſerai donc obligé de ſuppoſer, que le corps ait déja l'élévation requiſe, c'eſt à dire que l'angle B A C ſoit tel qu'il reſteroit conſtamment, ſi le fil ne ſouffroit point d'extenſion, auquel cas le corps ſe borneroit à décrire toujours le même cercle. Le fil venant enſuite à s'étendre & à ſe reſſerrer alternativement, le cercle ſe changera en une autre courbe à double courbure; l'angle B A C ne reſtera pas non plus parfaitement conſtant, mais comme les extenſions du fil ſont ſuppoſées infiniment-petites, il paroit naturel de croire, que les variations de cet angle doivent l'être auſſi. Je m'arrêterai donc encore à cette ſuppoſition, que l'angle Φ ne puiſſe différer & varier qu'infiniment-peu d'un angle conſtant, que j'appellerai $= \delta$, & en faiſant $\Phi = \delta + \psi$, ψ ſera un angle variable infiniment-petit, affirmatif ou négatif.

§. 10. On aura donc

$$x = (a + \zeta) \text{ cof. } (\delta + \psi).$$
$$y = (a + \zeta) \text{ ſin. } (\delta + \psi) \text{ cof. } \omega.$$
$$z = (a + \zeta) \text{ ſin. } (\delta + \psi) \text{ ſin. } \omega.$$

Delà on tire

$$\partial x = \partial \zeta \text{ cof. } (\delta + \psi) - (a + \zeta)\, \partial \psi \text{ ſin. } (\delta + \psi).$$
$$\partial y = \partial \zeta \text{ ſin. } (\delta + \psi) \text{ cof. } \omega + (a + \zeta)\, \partial \psi \text{ cof. } (\delta + \psi) \text{ cof. } \omega - (a + \zeta)\, \partial \omega \text{ ſin. } (\delta + \psi) \text{ ſin. } \omega.$$
$$\partial z = \partial \zeta \text{ ſin. } (\delta + \psi) \text{ ſin. } \omega + (a + \zeta)\, \partial \psi \text{ cof. } (\delta + \psi) \text{ ſin. } \omega + (a + \zeta)\, \partial \omega \text{ ſin. } (\delta + \psi) \text{ cof. } \omega.$$

On aura de même

$$\partial \partial x = \partial \partial \zeta \text{ cof. } (\delta + \psi) - 2\, \partial \zeta \partial \psi \text{ ſin. } (\delta + \psi) - (a + \zeta)\, \partial \partial \psi \text{ ſin. } (\partial + \psi) - (a + \zeta)\, \partial \psi^2 \text{ cof. } (\delta + \psi).$$

$\partial \partial y$

$$\partial\partial y = \partial\partial\zeta \sin.(\delta+\psi)\cos.\omega + 2\delta\zeta\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\cos.\omega$$
$$- 2\partial\zeta\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega - (a+\zeta)\partial\psi^2\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega$$
$$+ (a+\zeta)\partial\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\cos.\omega - (a+\zeta)\partial\omega^2\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega$$
$$- 2(a+\zeta)\partial\psi\partial\omega\cos.(\delta+\psi)\sin.\omega - (a+\zeta)\partial\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega.$$

$$\partial\partial z = \partial\partial\zeta \sin.(\delta+\psi)\sin.\omega + 2\delta\zeta\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\sin.\omega$$
$$+ 2\partial\zeta\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega - (a+\zeta)\partial\psi^2\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega$$
$$+ (a+\zeta)\partial\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\sin.\omega - (a+\zeta)\partial\omega^2\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega$$
$$+ 2(a+\zeta)\partial\psi\partial\omega\cos.(\delta+\psi)\cos.\omega + (a+\zeta)\partial\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega.$$

§. 11. Ces derniéres formules étant extrémement compliquées, il eſt tems enfin de voir, quels ſont les termes, qu'on peut négliger dans chacune. Je remarque donc, qu'on peut d'abord négliger le ζ & le ψ dans tous les termes, affectés de $a+\zeta$ & de $\delta+\psi$, quoiqu'on n'ait pas oſé le faire avant la différentiation, dans laquelle autrement on auroit perdu bien des termes très eſſentiels. Enſuite une lecture réïtérée & attentive des §§. 5. 6. 12. 13 & 14. de mon prémier Mémoire convaincra, ſans que j'aye beſoin d'entrer dans de longues diſcuſſions pour en faire l'application à notre préſent cas, que $\partial\zeta$ & $\partial\psi$ ſont à $\partial\omega$ comme $1 : \sqrt{\infty}$, mais qu'au contraire $\partial\partial\zeta$ & $\partial\partial\psi$ ſont à $\partial\omega^2$ dans un rapport fini (*). Ainſi dans les expreſſions de ∂y & ∂z on pourra omettre

 tous

(*) Je croyois être le premier, qui eut découvert la vérité de cette propoſition, qui d'abord m'a paru aſſes paradoxe, que deux variables x & y, & leurs premiéres différences ∂x & ∂y étant dans un rapport infiniment-petit, $\partial\partial x$ & ∂y^2 pouvoient être dans un rapport fini: mais j'ai vu, depuis que les deux premiers Mémoires ſur cette matiére ont été imprimés, que M. Euler le Père a traité cette propoſition comme déja connue, dans divers Mémoires, & entre autres, dans celui qui a pour titre *De collisione corporum gyrantium*, inſéré dans le Tom. XVII. de nos Nouveaux Commentaires.

tous les termes affectés de $\partial\zeta$ & $\partial\psi$, & ne garder que ceux affectés de $\partial\omega$. Mais dans les expreſſions de $\partial\partial x$, $\partial\partial y$ & $\partial\partial z$, il faudra outre les termes affectés de $\partial\omega^2$ & de $\partial\partial\omega$, garder encore ceux affectés de $\partial\partial\zeta$ & $\partial\partial\psi$. D'après tout ceci on aura donc les équations ſuivantes ſimplifiées:

$$x = a \text{ cof. } \delta;$$
$$y = a \text{ ſin. } \delta \text{ cof. } \omega;$$
$$z = a \text{ ſin. } \delta \text{ ſin. } \omega$$

$$\partial x = \partial\zeta \text{ cof. } \delta - a\,\partial\psi \text{ ſin. } \delta;$$
$$\partial y = -a\,\partial\omega \text{ ſin. } \delta \text{ ſin. } \omega;$$
$$\partial z = a\,\partial\omega \text{ ſin. } \delta \text{ cof. } \omega.$$

$$\partial\partial x = \partial\partial\zeta \text{ cof. } \delta - a\,\partial\partial\psi \text{ ſin. } \delta.$$
$$\partial\partial y = \partial\partial\zeta \text{ ſin. } \delta \text{ cof. } \omega + a\,\partial\partial\psi \text{ cof. } \delta \text{ cof. } \omega - a\,\partial\omega^2 \text{ ſin. } \delta \text{ cof. } \omega - a\,\partial\partial\omega \text{ ſin. } \delta \text{ ſin. } \omega.$$
$$\partial\partial z = \partial\partial\zeta \text{ ſin. } \delta \text{ ſin. } \omega + a\,\partial\partial\psi \text{ cof. } \delta \text{ ſin. } \omega - a\,\partial\omega^2 \text{ ſin. } \delta \text{ ſin. } \omega + a\,\partial\partial\omega \text{ ſin. } \delta \text{ cof. } \omega.$$

§. 12. Il faut encore chercher le ∂s & le $\partial\partial s$. Or on a $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial s^2$; & puisque ∂x, à ce que l'on voit, eſt dans un rapport infiniment-petit à ∂y & ∂z, on pourra le négliger, & on aura

$$\partial s^2 = \partial y^2 + \partial z^2 = a^2\,\partial\omega^2 \text{ ſin. } \delta^2, \text{ et } \partial s = a\,\partial\omega \text{ ſin. } \delta.$$

Mais comme cette valeur n'a été trouvée qu'en négligeant pluſieurs termes infiniment-petits, on en concluroit fauſſement, que $\partial\partial s = a\,\partial\partial\omega \text{ ſin. } \delta$; mais il faut avoir recours à l'equation $\partial s\,\partial\partial s = \partial x\,\partial\partial x + \partial y\,\partial\partial y + \partial z\,\partial\partial z$, où l'on peut pourtant négliger le terme $\partial x\,\partial\partial x$, enſorte qu'on aura $\partial\partial s = \frac{\partial y\,\partial\partial y + \partial z\,\partial\partial z}{\partial s}$. Or

$\partial y\,\partial\partial y$

$$\partial y\,\partial\partial y = -a\,\partial\omega\,\partial\partial\zeta\,\text{sin.}\,\delta^2\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega - a\,a\,\partial\omega\,\partial\partial\psi\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,\delta\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega + a\,a\,\partial\omega^3\,\text{sin.}\,\delta^2\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega + a\,a\,\partial\omega\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta^2\,\text{sin.}\,\omega^2;$$

$$\partial z\,\partial\partial z = +a\,\partial\omega\,\partial\partial\zeta\,\text{sin.}\,\delta^2\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega + a\,a\,\partial\omega\,\partial\partial\psi\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,\delta\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega - a\,a\,\partial\omega^3\,\text{sin.}\,\delta^2\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega - a\,a\,\partial\omega\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta^2\,\text{cos.}\,\omega^2:$$

ce qui donne

$$\partial\partial s = \frac{a\,a\,\partial\omega\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta^2\,(\text{sin.}\,\omega^2 - \text{cos.}\,\omega^2)}{a\,\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta} = a\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta\,(\text{sin.}\,\omega^2 - \text{cos.}\,\omega^2).$$

§. 13. Reprenons donc enfin nos équations fondamentales, qu'on peut réduire à ces formes:

$$(A)\ \frac{2g\,P\,\zeta x}{M\theta a} = 2g - \frac{2\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{\partial x\,\partial\partial s}{\partial s\,\partial t^2};$$

$$(B)\ \frac{2g\,P\,\zeta y}{M\theta a} = \frac{-2\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{\partial y\,\partial\partial s}{\partial s\,\partial t^2};$$

$$(C)\ \frac{2g\,P\,\zeta z}{M\theta a} = \frac{-2\partial\partial z}{\partial t^2} + \frac{\partial z\,\partial\partial s}{\partial s\,\partial t^2};$$

& ſubſtituons y les valeurs trouvées pour x, y, z, & pour leur différentielles, on aura:

$$(C)\ \frac{2g\,P\,\zeta\,\text{cos.}\,\delta}{M\theta} = 2g - \frac{2\,(\partial\partial\zeta\,\text{cos.}\,\delta - a\,\partial\partial\psi\,\text{sin.}\,\delta)}{\partial t^2};$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{le terme } \frac{\partial x\,\partial\partial s}{\partial s\,\partial t^2}\\ \text{peut être rejetté}\end{array}\right].$$

$$(D)\ \frac{2g\,P\zeta\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,\omega}{M\theta} = -\frac{2(\partial^2\zeta\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,\omega + a\,\partial^2\psi\,\text{cos.}\,\delta\,\text{cos.}\,\omega - a\partial\omega^2 f.c.\,\delta\omega - a\,\partial^2\omega\,f.\,\delta f.\omega)}{\partial t^2} - \frac{a\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta\,\text{sin.}\,\omega\,(\text{sin.}\,\omega^2 - \text{cos.}\,\omega^2)}{\partial t^2}.$$

$$(E)\ \frac{2g\,P\zeta\,\text{sin.}\,\delta\,\text{sin.}\,\omega}{M\theta} = -\frac{2(\partial^2\zeta\,\text{sin.}\,\delta\,\text{sin.}\,\omega + a\,\partial^2\psi\,\text{cos.}\,\delta\,\text{sin.}\,\omega - a\partial\omega^2 f.\,\delta f.\omega + a\,\partial^2\omega f.\,\delta\,c.\,\omega)}{\partial t^2} + \frac{a\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,\omega\,(\text{sin.}\,\omega^2 - \text{cos.}\,\omega^2)}{\partial t^2}.$$

§. 14. Qu'on prenne (D) × sin. ω — (E) cos. ω, on trouvera $0 = a\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta - a\,\partial\partial\omega\,\text{sin.}\,\delta\,(\text{sin.}\,\omega^2 - \text{cos.}\,\omega^2)$, donc

auſſi $\partial\partial\omega$, & par-conſéquent $\partial\partial s = 0$, & la viteſſe turbinatoire $\frac{\partial s}{\partial t}$ doit être regardée comme conſtante; ce qu'on pouvoit d'ailleurs avec fondement préſumer d'avance.

§. 15. Les équations (D) & (E) ſont donc identiques, & ne tiennent lieu que d'une ſeule: en échange nous avons gagné cette autre équation:

(F) $\partial t = m\,\partial\omega$,

où m répréſente une conſtante, que nous déterminerons dans la ſuite.

§. 16. Prenons donc maintenant (C) $\times \frac{1}{2}$ cof. δ + (D) $\times \frac{\text{ſin. }\delta}{2\,\text{co. }\omega}$, en effaçant les termes affectés de $\partial\partial\omega$, & ſubſtituant $m\,\partial\omega$ pour ∂t, on a:

$$\frac{g\,P\,\zeta}{M\,\theta} = g\,\text{cof. }\delta - \frac{\partial\partial\zeta}{m\,m\,\partial\omega^2} + \frac{a\,\text{ſin. }\delta^2}{m\,m};$$

delà en multipliant par $\partial\zeta$, & intégrant:

$$\frac{g\,P\,\zeta\,\zeta}{2\,M\,\theta} = A + g\,\zeta\,\text{cof. }\delta - \frac{\partial\zeta^2}{2\,m\,m\,\partial\omega^2} + \frac{a\,\zeta\,\text{ſin. }\delta^2}{m\,m}: \text{ delà}$$

$$\partial\omega = \frac{\partial\zeta : m\sqrt{2A}}{\sqrt{1 + \left(\frac{g\,\text{cof. }\delta}{A} + \frac{a\,\text{ſin. }\delta^2}{m\,m\,A}\right)\zeta - \frac{g\,P\,\zeta\,\zeta}{2\,M\,\theta\,A}}} = \frac{\partial\zeta : m\sqrt{2A}}{\sqrt{1 + \alpha\zeta - \beta\zeta\zeta}},$$

en faiſant $\frac{g\,\text{cof. }\delta}{A} + \frac{a\,\text{ſin. }\delta^2}{m\,m\,A} = \alpha$, & $\frac{g\,P}{2\,M\,\theta\,A} = \beta$. En intégrant de nouveau, on trouve.

$$\omega = \frac{1}{m\sqrt{2\,A\,\beta}} \times A.\,\text{cof.}\,\frac{\alpha - 2\beta\zeta}{\sqrt{(\alpha\,\alpha + 4\beta)}} + B,$$

(voyez *Eul. Calc. Integr. T. I.* §. 91.), donc

$$\frac{\alpha - 2\beta\zeta}{\sqrt{(\alpha\,\alpha + 4\beta)}} = \text{cof. } m\,(\omega - B)\sqrt{2\,A\,\beta}, \text{ &}$$

$$\text{I. } \zeta = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{(\alpha\,\alpha + 4\beta)}}{2\beta} \times \text{cof. } m\,(\omega - B)\sqrt{2\,A\,\beta}.$$

§. 17.

§. 17. En différentiant cette valeur de ζ, on aura

$$\partial\zeta = m\sqrt{\frac{\alpha\alpha A + 4\beta A}{2\beta}} \times \partial\omega \times \text{sin. } m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}, \text{ \& }$$

$$\partial\partial\zeta = -mmA\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} \times \partial\omega^2 \times \text{cos. } m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}.$$

Subſtituant les valeurs de ζ & $d\partial\zeta$ dans l'équation (D), elle deviendra:

$$\frac{g^p \text{ sin. } \delta}{M\theta} \times m^2\partial\omega^2 \times \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{g^p \text{ sin. } \delta}{M\theta} \times m^2\partial\omega^2 \times \frac{\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}}{2\beta} \times \text{cos. } m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}$$

$$= m^2 A \text{ sin. } \delta\sqrt{(\alpha^2+4\beta)} \times \partial\omega^2 \times \text{cos. } m(\omega - B)\sqrt{2A\beta} - a\partial\partial\psi \text{ cos. } \delta + a\partial\omega^2 \text{ sin. } \delta.$$

Intégrant deux fois, & débarraſſant le ψ, on trouvera la ſeconde des deux équations finales, qui doivent contenir le réſultat de nos recherches:

$$\text{II. } a\psi \text{ cos. } \delta = \left(\frac{\text{sin. } \delta \times \sqrt{(\alpha^2+4\beta)}}{2\beta} - \frac{g^p \text{ sin. } \delta\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}}{4M\theta\beta\beta A}\right) \text{cos. } m\,(\omega - B)\sqrt{2\beta A}$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2}a \text{ sin. } \delta - \frac{g^p m^2 \alpha \text{ sin. } \delta}{4M\theta\beta}\,\omega\,\omega\right) + C\,\omega + D.$$

§. 18. Il faudra maintenant chercher la valeur de m, & la ſubſtituer avec les valeurs de α & β dans nos équations. Or ſi l'on a un pendule A C de la longueur a, décrivant en turbinant un cone, dont l'angle formé par l'axe A B & le coté A C $= \delta$, on aura B C $= a$ ſin. δ; & nommant encore ω les angles décrits autour de B, la viteſſe du corps en C ſera $= \frac{a\,\partial\omega \text{ sin. } \delta}{\partial t} = \frac{a \text{ sin. } \delta}{m}$, & la force centrifuge du corps ſera Tab. III. Fig. 7.

$$= \left(\frac{a \text{ sin. } \delta}{m}\right)^2 : a \text{ sin. } \delta = \frac{a \text{ sin. } \delta}{m^2}.$$

De même la gravité du corps étant exprimée par la verticale C D $= 2g$, que cette force ſoit réſolue en C F & C E, dont celle-ci ne tend qu'à allonger le fil, & dont celle-là eſt oppoſée à la force centrifuge, on aura C F $= 2g$ tang. δ; il faudra donc, que $2g$ tang. $\delta = \frac{a \text{ sin. } \delta}{m\,m}$, ce qui donne

$$m = \sqrt{\frac{a \text{ cos. } \delta}{2g}}.$$

Après les ſubſtitutions faites nos équations ſe changeront en celles-

celles-ci :

$$\text{I. } \zeta = \frac{M\theta\left(\frac{1}{2}\cos.\delta^2 + \sin.\delta^2\right)}{P\cos.\delta} - \frac{M\theta}{P}\sqrt{\frac{4\sin.\delta^2 + \cos.\delta^4}{\cos.\delta^2} + \frac{2PA}{gM\theta}} \times \cos.(\omega - B)\sqrt{\frac{P\,a\cos.\delta}{2M\theta}}.$$

$$\text{II. } a\psi\cos.\delta = \frac{M\theta\sin.\delta}{P}\sqrt{\frac{4\sin.\delta^2 + \cos.\delta^4}{\cos.\delta^2}} + \frac{2PA}{gM\theta} \times 0 + \left(\frac{1}{2}a\sin.\delta - \frac{1}{4}a\sin.\delta\cos.\delta^2 - \frac{1}{2}a\sin.\delta^3\right)\omega\omega + C\omega + D = \frac{1}{4}a\cos.\delta^2 \times \omega\omega + C\omega + D.$$

§. 19. En examinant ces deux équations de plus près, on voit que la prémiére répond parfaitement à l'eſpèce de mouvement, que nous avons ſuppoſé au corps, & qu'elle eſt fort propre à répreſenter les extenſions & reſſerremens alternatifs du fil, puiſqu'ils ſe font encore, à ce qu'elle indique, ſuivant un mouvement cycloïdal, ce que nous avons vu déja avoir lieu dans nos précédens Mémoires. Les conſtantes A & B ſe détermineront faicilement par les circonſtances ſuppoſées connues de l'extenſion du fil, & de ſa viteſſe extenſive ou reſſerrante, au moment que le mouvement turbinatoire a commencé.

§. 20. Mais ſi la prémiére équation ſatisfait ſi bien, c'eſt tout le contraire quant à la ſeconde, qui ne fait rien de moins que renverſer tous nos calculs & l'hypothèſe principale, ſur laquelle ils repoſent, ſavoir que l'angle δ n'eſt ſuſceptible que d'accroiſſemens ou de diminutions infiniment-petites ψ. En effet l'équation donne à entendre, que l'angle ψ augmente à l'infini, ce qui eſt non ſeulement contraire à l'hypothèſe, mais abſurde.

§. 21.

§. 21. Il faut donc néceſſairement l'une de ces deux choſes: 1°. ou bien les calculs ſont juſtes, & l'hypothèſe dont je viens de parler, & qui leur ſert de baſe, manque de fondement; ce qui veut dire, qu'il n'eſt pas poſſible, qu'en ſuppoſant une extenſibilité tant ſoit peu petite au fil, il puiſſe en turbinant garder avec l'axe un angle à-peu-près conſtant, & ne faire que de petites nutations: quoique cette hypothèſe paroiſſe ſi naturelle, qu'on a de la peine à y renoncer, & qu'on eſt plutôt porté à ſoupçonner le calcul dans le tort. 2°. ou bien l'hypothèſe eſt légitime & vraye, & j'ai commis quelque faute dans le calcul, ou quelque paralogisme en rejettant des termes, que je croyois pouvoir négliger. J'avouérai même quant à ce dernier point, qu'ayant mis la plus grande attention à paſſer, s'il m'eſt permis de m'énoncer ainſi, mes termes au crible, & à faire une application juſte des principes établis & démontrés dans les précédens Mémoires, je ne puis cependant, vu la grande délicateſſe de la matière, me raſſurer entiérement de n'avoir pas choppé dans quelque endroit, qui peut avoir influé ſur tout le reſte. Il faut au reſte bien ſe garder de conclure, de ce que l'équation II. eſt abſurde, que le calcul ſoit erroneux. Car ſi l'hypothèſe étoit fauſſe, comme à tout prendre cela n'eſt pas abſolument impoſſible, il ne ſeroit pas étonnant, & l'on devroit au contraire s'y attendre, qu'elle menat enfin à quelque réſultat abſurde. Au reſte je je n'ai pas beſoin d'avertir, que ſi l'équation II. étoit bonne, les conſtantes C & D indiqueroient, l'une la viteſſe nutatoire initiale, & l'autre l'angle ψ initial du corps en mouvement.

RACCOURCI DES ELEMENS DIOPTRIQUES, QUI SERVENT DE BASE À LA THEORIE DES OBJECTIFS ACHROMATIQUES APPLICABLES AUX MICROSCOPES.

Par

W. L. KRAFFT.

Lu à l'Académie le 17 *Mars* 1788.

Je me propoſe dans ce Memoire, de reduire à des principes généraux & de preſenter dans leur rapprochement les *elemens* dioptriques, qui ſervent de baſe à la Theorie des objectifs achromatiques applicables aux *Microſcopes*. M. Euler, dans le Tome XVIII. des Nouveaux Commentaires de l'Academie, a donné comme un Supplement à ſon grand ouvrage dioptrique, un Memoire ſur l'application des objectifs achromatiques à toute ſorte de *Teleſcopes*. Le procedé extremement ingenieux qu'il y ſuit pour ſimplifier le calcul, ne ſcauroit etre appliqué immediatement aux Microſcopes, vuque les elemens, dont il part, ſont adaptés à l'hypotheſe d'un objet *infiniment éloigné*. J'ai donc cru, qu'il ne ſeroit pas ſans interet, de preſenter ces elemens ſous une forme, qui les rendit propres à etre appliqués aux Microſcopes, d'autant plus, que le rapprochement de ces elemens m'a fourni des moyens de ſimplifier en quelques points

points la maniere de les demontrer & que la Theorie, à la quelle ils doivent ſervir de baſe, en pourra fournir d'autres de perfectionner davantage les nouveaux Microſcopes de M. Aepinus, que cet illuſtre ſcavant, memé en y employant des objectifs achromatiques des *Teleſcopes*, a deja portés à un haut point de perfection.

Elemens généraux.

1.) Que la demi-lentille ſpherique de verre APQB ait pour les rayons de courbure de ſes deux ſurfaces les lignes $CM = f$ & $DN = g$ & conſequemment pour ſon axe & ſon epaiſſeur la ligne $AB = e$. Soit l'angle de l'ouverture de la premiere ſurface $ACM = u$ & le demidiametre de cette ouverture $MK = x = f \text{ ſin. } u$, enſorte que $AK = 2f. \overline{\text{ſin. } \frac{1}{2}u}^2$. Suppoſons dans l'axe à la diſtance $AL = y$ devant la lentille, le point lumineux L, dont le rayon LM partant de l'axe ſous l'angle $ALM = \omega$ & paſſant par l'extremité de l'ouverture, ſoit refracté au point M de la premiere ſurface refringente, ſelon MN; & au point N de la ſeconde ſurface refringente, ſelon NV. Il s'agit de determiner l'inclinaiſon du rayon refracté NV à l'axe, & la diſtance de ce point d'interſection V à la lentille, ou l'angle $NVB = \Omega$ & la diſtance $BV = Y$. Tab. IV. Fig. 1.

2.) Deſignons pour cet effet l'angle de la premiere incidence LMc par i & celui de la premiere refraction CMN par r. En mettant pour abreger $\frac{f+y}{f} = \lambda$, on aura par les Δ LMK & LMC

$$\text{tang. } \omega = \frac{\text{ſin. } u}{\lambda - \text{coſ. } u} \quad \& \quad \text{ſin. } i = \lambda . \text{ ſin. } \omega = \frac{\lambda . \text{ſin. } u}{\sqrt{(1 + \lambda^2 - 2\lambda \text{ coſ. } u)}}.$$

Donc ſi la rapport $n : 1$ deſigne la loi de la refraction pour un rayon de moyenne refrangibilité paſſant d'air en verre d'eſpece donnée, on aura

ſin. $r =$

$$\text{fin. } r = \frac{\lambda \text{ fin. } \omega}{n} = \frac{\lambda . \text{ fin. } u}{n \sqrt{(1 + \lambda^2 - 2\lambda \text{ cof. } u)}} .$$

Connoiſſant par là l'angle $MOA = \psi = u - r$ ſous le quel le prolongement NO du rayon refracté MN eſt incliné à l'axe de la lentille après la premiere refraction, on aura $KO = \frac{x}{\tan g . \psi}$ d'où l'on trouve la diſtance du point d'interſection de ce rayon avec l'axe à la premiere ſurface refringente, ou

$$AO = 2f . \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} u}^2 + f . \text{ fin. } u . \text{ cotang. } \psi .$$

Mettant cette diſtance $AO = K$; pour connoitre l'angle de la ſeconde incidence $MND = \eta$ & celui de la ſeconde refraction $VNd = \varrho$, on aura dans le ΔDNO,

$$\text{fin. } \eta = \frac{K + g - e}{g} . \text{ fin. } \psi$$

& conſequemment

$$\text{fin. } \varrho = \frac{n(K + g - e)}{g} . \text{ fin. } \psi .$$

Or connoiſſant ces angles, on a $\Omega = \varrho - \eta + \psi$ & comme l'ouverture $BDN = v = \eta - \psi$, que doit avoir la ſeconde ſurface refringente, a pour ſon demidiametre $NR = g . \text{ fin. } v$, enſorte que

$$BR = 2g . \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} v}^2 \text{ \& } NR = RV . \text{ tang. } \Omega ;$$

on aura

$$g . \text{ fin. } v = (Y + 2g . \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} v}^2) . \text{ tang. } \Omega ;$$

d'ou l'on tire

$$Y = g . \text{ fin. } v . \text{ cotang. } \Omega - 2g . \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} v}^2 .$$

3.) Quoique ces formules n'embraſſent proprement, que les rayons partant d'un *point lumineux de l'axe meme* de la lentille: elles s'appliquent cependant avec la meme préciſion & facilité aux rayons, qui partent *d'un point quelconque d'un objet* placé ſur l'axe à une diſtance donnée de la lentille.

Car

Car ſoit la verticale $E\varepsilon = z$ le demidiametre d'un tel objet, ſa diſtance à la lentille $AE = a$, & e un point quelconque, dont la hauteur au deſſus de l'axe, $Ee = t$. Le rayon eM tombant ſur la lentille, comme s'il venoit du point L de l'axe meme; on n'a, qu'à ſuppoſer dans les formules precedentes

$$y = a + \frac{EK.t}{x-t} = \frac{ax + AK.t}{x-t};$$

enſorte, que

$$y = \frac{ax + 2ft.\overline{\text{ſin. } \frac{1}{2}u}^2}{x-t} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{(a+f)x - ft.\text{coſ. } u}{f(x-t)}.$$

Application des formules précédentes aux rayons infiniment proches de l'axe de la lentille.

1.) Pour appliquer les formules précédentes à la determination de la route des rayons infiniment proches de l'axe de la lentille, on n'a, qu'à ſuppoſer à la premiere ſurface refringente une ouverture infiniment petite; & conſequemment à faire ſin. $u = u$ & coſ. $u = 1$; moyennant quoi on a

$$y = \frac{ax}{x-t} \quad \& \quad \lambda = \frac{(a+f)x - ft}{f(x-t)}.$$

Or ces valeurs donnent

$$K = \frac{n(\lambda-1)f}{n(\lambda-1)-\lambda} = \frac{nf.y}{(n-1)y-f};$$

$$\Omega = \frac{(n-1)K(K-e)+ng}{K} \cdot \frac{f}{g} \cdot u \quad \&$$

$$Y = \frac{(K-e)g}{(n-1)(K-e)+ng} y,$$

enſorte, qu'en ſeparant les termes affectés de l'epaiſſeur de le lentille, on a

$$\Omega = \left[\frac{(n-1)K+ng}{K} - (n-1).\frac{e}{K}\right].\frac{f}{g}.u \quad \&$$

$$Y = \frac{g.K}{(n-1)K+ng}\left[1 - \frac{ng}{(n-1)(K-e)+ng}.\frac{e}{K}\right].$$

2.) La distance K étant arbitraire, vu qu'il est indifférent, quelle que soit la distance du point d'intersection du rayon M N avec l'axe après la *seule premiere refraction*; on la prendra toujours si grande, que la valeur $\frac{e}{K}$ soit assés petite pour qu'on puisse negliger les termes, qui sont affectés de ce coëfficiant, ainsi que l'epaisseur de la lentille; moyennant quoi & en substituant la valeur de K on aura

$$\Omega = \frac{(n-1)(f+g)y-fg}{g.y}.u \;\&$$

$$Y = \frac{fg.y}{(n-1)(f+g)y-fg}.$$

Pour abreger ces expressions, on remarque, que pour le cas $y = \infty$, Y devient la distance du foyer de la lentille $= p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$; on aura donc en substituant cette valeur

$$\Omega = \frac{y-p}{p\,y} f.u \;\&\; Y = \frac{p.y}{y-p} = \frac{f.u}{\Omega}.$$

3.) Pour determiner par ces formules la position & le demidiametre de l'image de l'objet formée derriere la lentille, on n'a, qu'à les appliquer aux rayons, qui partent du *centre de l'objet*, & à ceux, qui partent de *son extremité*. Or pour un rayon comme E M partant du centre de l'objet, on a $t = o$ & consequemment $y = a$; donc

Fig. 2.

$$\Omega = MFA = \frac{a-p}{ap} f.u \;\&\; Y = AF = \frac{ap}{a-p},$$

& comme le rayon E A partant du centre de l'objet dans la direction de l'axe meme de la lentille, y passe sans etre refracté; le point d'intersection F sera l'image formée par des rayons infiniment proches de l'axe ou l'image *principale* du point E, de la quelle la distance à la lentille etant designée par α, on a

$$\alpha = AF = \frac{ap}{a-p} \;\&\; \Omega = MFA = \frac{f}{\alpha}.u = \frac{x}{\alpha}.$$

Pour un rayon comme *e* M partant de l'extremité de l'objet, on

on a $t = z$ & conſequemment $y = \frac{ax}{x-z}$, donc

$$\Omega = MUA = \frac{(a-p)x+pz}{ap.x}.f.u \;\&$$

$$Y = AU = \frac{ap.x}{(a-p)x+pz},$$

ou en mettant l'angle $EAe = \Phi$, enſorte que $z = a.\,\text{tang.}\,\Phi$ on aura

$$\Omega = \frac{x+a\,tang.\,\Phi}{a} \;\&\; Y = \frac{ax}{x+a\,tang.\,\Phi}.$$

Or comme la valeur de K priſe comme cy-deſſus, nous met en droit de ſuppoſer l'epaiſſeur de la lentille $e = o$, le rayon eAH tiré par le centre A de la lentille, y paſſe ſans etre refracté & le point d'interſection ζ, où ce rayon eſt coupé par le prolongement du rayon MU, eſt l'image principale de l'extremité de l'objet, dont on aura la diſtance au centre de la lentille

$$A\zeta = \frac{AU.\,ſin.\,\Omega}{ſin.(\Omega-\Phi)} = \frac{AU.\,tang.\,\Omega}{coſ.\Phi(tang.\,\Omega - tang.\,\Phi)}.$$

Or dans cette meme ſuppoſition on a auſſi

$$x = AU.\,\text{tang.}\,\Omega = \frac{ax\,tang.\,\Omega}{x+a.\,tang.\,\Phi},$$

ce qui donne $\text{tang.}\,\Omega - \text{tang.}\,\Phi = \frac{x}{a}$; donc

$$A\zeta = \frac{a}{coſ.\,\Phi} \;\&\; a = A\zeta.\,coſ.\,\Phi = AF.$$

Le point ζ eſt donc placé verticalement au deſſous du point F, & la perpendiculaire $F\zeta$ eſt l'image principale de l'objet, de la quelle on aura le demidiametre

$$F\zeta = A\zeta.\,ſin.\,\Phi = a\,\text{tang.}\,\Phi = \frac{a}{a}.z.$$

4.) Soit maintenant un nombre quelconque de lentilles placées à certaines diſtances les unes des autres ſur un axe commun, & mettons

les

Fig. 3.

les distances des foyers	les distances
de la 1 $= p$	de la 1 à la 2 $=$ A B $=$ D^{I}
de la 2 $= q$	de la 2 à la 3 $=$ B C $=$ D^{II}
de la 3 $= r$	de la 3 à la 4 $=$ C D $=$ D^{III}
de la 4 $= s$	

Que devant ces lentilles soit placé sur l'axe un objet lumineux, dont le demidiametre E $e = z$. Que les rayons de moyenne refrangibilité infiniment proches de l'axe & refractés par les lentilles en partant du centre de l'objet, prennent la route E p F q G r H s & que e p Q R S soit la route de ceux, qui partent de l'extremité de l'objet, enforte que les lentilles par chaque refraction repreſentent les images de l'objet, F ζ, G η, H ϑ, I ι etc. Mettons de plus

Les demidiametre des ouvertures

de la 1 lent.	A $p = x$	$=$ R^{I}
la 2 lent.	B Q	$=$ R^{II}
la 3 lent.	C R	$=$ R^{III}
la 4 lent.	D S	$=$ R^{IV}

Les distances

de l'objectif à la 1 lent. E A $= \alpha$	de la 1 lent. à la 1 imag. A F $= \alpha$
de la 1 imag. à la 2 lent. F B $= b$	de la 2 lent. à la 2 imag. B G $= \beta$
de la 2 imag. à la 3 lent. G C $= c$	de la 3 lent. à la 3 imag. C H $= \gamma$
de la 3 imag. à la 4 lent. H D $= d$	de la 4 lent. à la 4 imag. D I $= \delta$

& les distances entre la

1 & 2 lent.	A B $=$ D^{I}	$= \alpha + b$
2 & 3 ——	B C $=$ D^{II}	$= \beta + c$
3 & 4 ——	C D $=$ D^{III}	$= \gamma + d$.

Cela étant établi: les formules précédentes nous fourniſſent les 10 ſuivans elemens dioptriques:

I. *La*

I.) *La distance de chaque image aux deux lentilles, entre les quelles elle se trouve placée.*

Nous avons par ce qui a été demontré cy dessûs

$\alpha = \frac{a\,p}{a-p}$; donc $b = D^{I} - \alpha$

$\beta = \frac{b\,q}{b-q}$; $\quad c = D^{II} - \beta$

$\gamma = \frac{c\,r}{c-r}$; $\quad d = D^{III} - \gamma$

II.) *Les angles, que le rayon passant du centre de l'objet par l'extremité de l'ouverture fait après chaque refraction avec l'axe des lentilles, & les demidiametres des ouvertures dues à la route de ce rayon.*

Car puisque $AFp = \frac{1}{\alpha}x$; on a $Bq = \frac{b\,x}{\alpha}$

donc $BGq = .\frac{1}{\beta}.\frac{b\,x}{\alpha}$; $\quad Cr = \frac{b\,c}{\alpha\,\beta}.x$

$CHr = \frac{1}{\gamma}.\frac{b\,c\,.\,x}{\alpha\,\beta}$; $\quad Ds = \frac{b\,c\,d}{\alpha\,\beta\,\gamma}.x.$

III.) *Les demidiametres des images principales.*

Car la premiere image étant l'objet de la 2de lentille & ainsi de suite, & ayant trouvé

$F\zeta = \frac{\alpha}{a}.z = \alpha\,\text{tang.}\,\Phi$; on aura

$G\eta = \frac{\alpha\,\beta}{a\,b}.z = \frac{\alpha\,\beta}{b}.\text{tang.}\,\Phi$;

$H\vartheta = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{a\,b\,c}.z = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{b\,c}.\text{tang.}\,\Phi$;

$Ii = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}{a\,b\,c\,d}.z = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}{b\,c\,d}.\text{tang.}\,\Phi$;

IV. *Les distances, comme B O, C O′, D O″, aux quelles le rayon passant de l'extremité de l'objet par le centre de la premiere lentille, coupe après chaque refraction l'axe des lentilles.*

Car les points O, O′, O″, étant les foyers des rayons, qui partent comme des points A, O, O′ de l'axe meme; nous avons

$BO = \frac{AB \cdot q}{AB - q}$; donc $GO = \beta - BO = \frac{\alpha\beta q}{b(\alpha + b - q)}$ et $CO = GO + c$.

$CO' = \frac{CO \cdot r}{CO - r}$; $HO' = \gamma - CO' = \frac{GO \cdot \gamma \cdot r}{c\,GO + c - r)}$ et $DO' = HO' + d$.

$DO'' = \frac{DO' \cdot s}{DO' - s}$; $IO'' = \delta - DO'' = \frac{HO' \cdot \delta \cdot s}{d(HO' + d - s)}$.

V.) *Les angles, comme B O Q; C O′ R; D O″ S; &c. sous lesquels ce meme rayon coupe après chaque refraction l'axe des lentilles.*

Car ayant

tang. $O = \frac{G\eta}{GO}$; tang. $O' = \frac{H\vartheta}{HO'}$; tang. $O'' = \frac{Ii}{IO''}$;

& les valeurs reciproques de G O, H O′, I O″, etant par ce, qui precede

$\frac{1}{GO} = \frac{b}{\beta q}\left(1 + \frac{b-q}{\alpha}\right)$; $\frac{1}{HO'} = \frac{c}{\gamma r}\left(1 + \frac{c-r}{GO}\right)$; $\frac{1}{IO''} = \frac{d}{\delta s}\left(1 + \frac{d-s}{HO'}\right)$,

on aura

tang. $O = \frac{(\alpha + b - q)}{q}$. tang. Φ,

tang. $O' + \frac{\alpha\beta}{b \cdot r}$ tang. $\Phi + \frac{(c-r)}{r}$ tang. O,

tang. $O'' = \frac{\alpha\beta\gamma}{b\,c \cdot s}$ tang. $\Phi + \frac{(d-s)}{s}$ tang. O′

VI.) *Les demidiametres des ouvertures, comme B Q, C R, D S, dues aux rayons, qui paſſent de l'extremité de l'objet par le centre de la premiere lentille.*

Car ayant

$BQ = R^{II} = \frac{AB}{AF}$. $F\zeta$; $CR = R^{III} = \frac{CO}{GO}$. $G\eta$; $DS = R^{IV} = \frac{DO'}{HO'}$. $H\vartheta$,

en ſubſtituant les valeurs trouvées cy deſſûs, on aura

$R^{II} = (\alpha + b)$. tang. Φ,

$R^{III} = \frac{\alpha\beta}{b}$. tang. $\Phi + c$. tang. O,

$R^{IV} = \frac{\alpha\beta\gamma}{b\,c}$. tang. $\Phi + d$. tang. O′.

Or

Or pour eliminer de ces formules les angles O, O′, O″ les expreſſions trouvées cy deſſûs nous donnent

$$\text{tang. } O + \text{tang. } \Phi = \frac{\alpha + b}{q} \text{ tang. } \Phi;$$

$$\text{tang. } O' + \text{tang. } O = \frac{\alpha\beta}{br} \text{ tang. } \Phi + \frac{c}{r} \text{ . tang. } O;$$

$$\text{tang. } O'' + \text{tang. } O' = \frac{\alpha\beta\gamma}{bc.s} \text{ tang. } \Phi + \frac{d}{s} \text{ . tang. } O'; \text{ \&c.}$$

d'où l'on tire

$$\text{tang. } O = \frac{BQ}{q} - \text{tang. } \Phi,$$

$$\text{tang. } O' = \frac{CR}{r} - \frac{BQ}{q} + \text{tang. } \Phi,$$

$$\text{tang. } O'' = \frac{DS}{s} - \frac{CR}{r} + \frac{BQ}{q} - \text{tang. } \Phi,$$

& ſubſtituant ces valeurs, on a

$$R^{II} = (\alpha + b) \text{ . tang. } \Phi,$$

$$R^{III} = \frac{c}{q} \cdot R^{II} - c\left(1 - \frac{\alpha\beta}{bc}\right) \text{ . tang. } \Phi,$$

$$R^{IV} = \frac{d}{r} R^{III} - \frac{d}{q} \cdot R^{II} + d\left(1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{bc}\right) \text{ . tang. } \Phi.$$

VII.) *Le demidiametre du Champ apparant.*

Ce demidiametre étant $z = a$. tang. Φ; on obtient par les formules précédentes

pour le nombre des lentilles		ou en eliminant les diſtances des foyers par les diſtances des images principales
2.	$z = \frac{a}{\alpha + b} \cdot R^{II}$	$z = \frac{a}{\alpha + b} \cdot R^{II}$
3.	$z = \frac{abc}{bc - \alpha\beta}\left[\frac{R^{II}}{q} - \frac{R^{III}}{c}\right]$	$z = \frac{a}{(\beta + c)} \cdot \frac{b}{\alpha}\left[R^{III} - \frac{c}{\beta} R^{II}\right]$.
4.	$z = \frac{abcd}{bcd - \alpha\beta\gamma}\left[\frac{R^{II}}{q} - \frac{R^{III}}{r} + \frac{R^{IV}}{d}\right]$	

VIII.) *La juſte diſtance de l'oeil à la derniere lentille, due au champ apparant.*

Afin que l'oeil apperçoive tout le champ apparent, dont le demidiametre vient d'etre determiné; il faut, qu'il ſoit placé au point O ou O′ ou O″ ſelon le nombre des lentilles. Or ayant

$$BO = \frac{BQ}{\text{tang. } O}; \quad CO^{I} = \frac{CR}{\text{tang. } O'}; \quad DO^{II} = \frac{DS}{\text{tang. } O''},$$

en ſubſtituant les expreſſions de ces tangentes trouvées cy deſſus, on aura

pour le nombre des lentilles	la diſtance de l'oeil à la derniere lentille, dûe au champ appar.
2.	$\dfrac{R^{II}}{\frac{R^{II}}{q} - \text{tang. } \Phi}$
3.	$\dfrac{R^{III}}{\frac{R^{III}}{r} - \frac{R^{II}}{q} + \text{tang. } \Phi}$
4.	$\dfrac{R^{IV}}{\frac{R^{IV}}{s} - \frac{R^{III}}{r} + \frac{R^{II}}{q} - \text{tang. } \Phi}$

ou ayant dans tous les Δ comme BOQ & $GO\eta$

$$BO = \frac{BQ \cdot GO}{G\eta} = BQ\,\frac{(BG - BO)}{G\eta}$$

& conſequemment $BO = \frac{BQ \cdot BG}{BQ + G\eta}$; on voit, que cette diſtance de l'oeil ſe trouve généralement en prenant le produit du demidiametre de l'ouverture de la derniere image à la derniere lentille & en diviſant ce produit par la ſomme des demidia-

midiametres de l'ouverture de la derniere lentille & de la derniere image; de façon, qu'on aura

pour le nombre des lentilles	la distance de l'oeil à la derniere lentille, dûe au champ appar.
2.	$\frac{R^{II} \cdot \beta}{R^{II} + \frac{\alpha\beta}{ab} \cdot z}$
3.	$\frac{R^{III} \cdot \gamma}{R^{III} + \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} \cdot z}$
4.	$\frac{R^{IV} \cdot \delta}{R^{IV} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} \cdot z}$

IX.) *Le Groſſiſſement.*

L'oeil placé dans les point O, O′, O″ voit le demidiametre de l'objet ſous un angle optique, dont la tangente vient d'etre determinée. Or à une diſtance arbitraire quelconque $= b$, qu'on pourroit appeller la *diſtance d'eſtime*, l'oeil verroit le demidiametre de ce meme objet ſous un angle optique, dont la tangente $= \frac{z}{b} = \frac{a}{b} \cdot \text{tang.} \Phi$. Deſignant donc par m^{II}; m^{III}; m^{IV} l'expoſant du groſſiſſement par 2, 3, 4 lentilles; on aura

pour le nombre des lentilles	l'expoſant du groſſiſſement
2.	$m^{II} = \frac{\alpha+b-q}{q} \cdot \frac{b}{a}$.
3.	$m^{III} = \left[\frac{\alpha\beta}{br} + \frac{(\alpha+b+q)}{q} \frac{(c-r)}{r}\right] \cdot \frac{b}{a}$.
4.	$m^{IV} = \left[\frac{\alpha\beta\gamma}{bc \cdot s} + \frac{(\alpha+b-q)}{q} \frac{(c-r)}{r} \cdot \frac{(d-s)}{s}\right] \cdot \frac{b}{a}$.

Or pour que l'oeil voye *diſtinctement*, il faut, qu'il reçoive de la derniere lentille des rayons *paralleles* & que conſequem-

ment l'image avant-derniere ſoit au foyer de la derniere lentille; & cette condition, neceſſaire pour la *diſtinction* de la viſion, nous donne pour 2 lentilles $b = q$; pour 3 lentilles $c = r$; &c. d'où l'on trouve

pour le nombre des lentilles	L'expoſant du groſſiſſement
2.	$m^{II} = \frac{\alpha}{q} \cdot \frac{b}{a}$.
3.	$m^{III} = \frac{\alpha\beta}{b.r} \cdot \frac{b}{a}$.
4.	$m^{IV} = \frac{\alpha\beta\gamma}{bc.s} \cdot \frac{b}{a}$.

X.) *Le degré de Clarté.*

L'oeil placé dans le points O, O′, O″, &c. reçoit du *centre de l'objet* un cône lumineux, dont la baſe à l'oeil, a pour demidiametres les perpendiculaires O o, O′ o', O″ o'', &c. En deſignant ces demidiametres reſpectivement par y^{II}; y^{III}; &c. comme expoſans du degré de clarté; on a

$$y^{II} = Oo = GO \cdot \text{tang. } G = GO \cdot \frac{Bq}{BG} = \frac{Bq}{BG} \cdot \frac{G\eta}{\text{tang. } O}.$$

$$y^{III} = O'o' = HO' \cdot \text{tang. } H = HO' \cdot \frac{Cr}{CH} = \frac{Cr}{CH} \cdot \frac{H\vartheta}{\text{tang. } O'}.$$

&c.

Or en ſubſtituant les valeurs trouvées cy deſſûs & ſuppoſant pour la diſtinction de la viſion $b = q$; ou $c = r$, ou $d = s$, &c. ſelon le nombre des lentilles, on trouve

$$y^{II} = \frac{x}{m^{II}} \cdot \frac{b}{a}; \; y^{III} = \frac{x}{m^{III}} \cdot \frac{b}{a} \text{ &c.}$$

enſorte, que les expoſans du degré de la clarté ſont reciproquement proportionels aux expoſans du groſſiſſement. Or le degré de clarté meme étant en raiſon du nombre des rayons de

de lumiere qui compoſent le cône lumineux, & ce nombre étant en raiſon du quarré du demidiametre de la baſe du cône: il s'en ſuit, que, le demidiametre de la prunelle de l'oeil étant deſigné par ω, enſorte, qu'il ſeroit inutile, que y fut plus grand, que ω; la clarté de la viſion naturelle à la meme diſtance ſera à celle par l'inſtrument pour le centre de l'objet comme $\omega^2 : y^2$, & conſequemment en prenant la clarté de la viſion naturelle à la meme diſtance pour l'unité, celle par les lentilles ſera $\frac{y^2}{\omega^2}$; qui donc ſera égale ou inferieure à la clarté de la viſion naturelle à la meme diſtance, ſelon que $y = \omega$ ou $y < \omega$.

Application des formules précédentes aux rayons, qui s'ecartent de l'axe de la lentille & à l'aberration à cauſe de la ſphericité.

1.) Pour appliquer les formules précédentes à la détermination de la route des rayons, qui s'ecartent de l'axe de la lentille, on n'a, qu'à donner à l'objectif une ouverture quelconque, que nous ſuppoſerons cependant telle, qu'on puiſſe negliger ſans erreur ſenſible les puiſſances plus hautes que le cube, du ſinus de l'angle ω, ſous le quel les rayons s'ecartent de l'axe de la lentille. Developpant en conſequence les formules précédentes, on a

$$\text{ſin. } u = (\lambda - 1) \,.\, \text{ſin. } \omega + \tfrac{1}{2}\lambda \,.\, (\lambda - 1)\, \text{ſin. } \omega^3,$$

$$\text{coſ. } u = 1 - \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \,.\, \text{ſin. } \omega^2, \text{ \& }$$

$$\text{ſin. } \psi = \left(\frac{(n-1)\lambda - n}{n}\right) \text{ſin. } \omega + \tfrac{1}{2}\frac{(n-1)}{n^2}(\lambda - 1)\,\lambda \,.\, (\lambda + n) \,.\, \text{ſin. } \omega^3,$$

d'où, en mettant pour abreger

$$M =$$

$$M = \frac{nf(\lambda-1)}{(n-1)\lambda-n} = \frac{nfy}{(n-1)y-f} \;\&$$

$$N = \tfrac{1}{2}\frac{(n-1)f(\lambda-1)\lambda^2(\lambda+n)}{n[(n-1)\lambda-n]^2} = \tfrac{1}{2}\frac{(n-1)y(f+y)^2[(n+1)f+y]}{nf[(n-1)y-f]^2},$$

on obtient $AO = K = M - N$ fin. ω^2, enſorte, que M deſigne la diſtance de l'image principale & N . fin. ω^2 l'aberration, *après la ſeule premiere refraction.* Donc ſi nous mettons la diſtance de l'image principale après la ſeule premiere refraction $M = k$, on a $\frac{nfy}{(n-1)y-f} = k$ &

$$N = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(k+y)^2(nk+y)}{(n-1)^2\cdot ky}.$$

Or en ſubſtituant $\frac{1}{n}$; $-g$; $-K$ & $-\psi$ à la place de n; f; y & ω, on change l'expreſſion pour la diſtance AO en celle pour la diſtance BV; moyennant quoi on a immediatement

$$BV = \frac{gK}{(n-1)K+ng} - \tfrac{1}{2}\frac{(n-1)K(K+g)^2[nK+(n+1)g]}{g[(n-1)K+ng]^2}\cdot \text{fin. } \psi^2$$

ou en ſubſtituant la valeur de $K = k - N$. fin. ω^2

$$BV = \frac{gk}{(n-1)k+ng} - \frac{ng^2N}{[(n-1)k+ng]^2}\cdot \text{fin. } \omega^2$$
$$- \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)k(k+g)^2[nk+(n+1)g]}{g[(n-1)k+ng]^2}\cdot \text{fin. } \psi^2.$$

Or pour le cas, ou ω & ψ ſont des angles infiniment petits, on a $BV = \alpha$; & conſequemment

$$\frac{gk}{(n-1)k+ng} = \alpha \;\&\; g = \frac{(n-1)k\alpha}{k-n\alpha};$$

moyennant quoi, en mettant pour abreger $\frac{(k-\alpha)^2(nk-\alpha)}{2(n-1)^2k\alpha} = N'$ & ayant fin. $\psi = \frac{y}{k}$ fin. ω, on obtient

$$BV = \alpha - \tfrac{n}{k^2}[\alpha^2 N + y^2 N'] \cdot \text{fin. } \omega^2,$$

enſorte, que l'aberration cauſée par la ſphericité de la lentille, ſe trouve

$\frac{n\cdot \text{fin. } \omega^2}{k^2}[\alpha^2 N + y^2 N']$ ou

$\frac{n\alpha^2x^2}{k^4}\left[\frac{N}{y^2} + \frac{N'}{\alpha^2}\right]$ à cauſe de fin. $\omega = \frac{x}{y}$.

La

La quantité k etant arbitraire: il eſt intereſſant de ſeparer dans cette expreſſion les termes, qui contiennent k. En developpant en conſequence le facteur $\frac{N}{y^2}+\frac{N'}{\alpha^2}$ & ayant $\frac{1}{y}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}$ & conſequemment

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{3}{\alpha y}\right),$$

nous aurons l'expreſſion ſuivante de l'aberration

$$\frac{n\alpha^2x^2}{2(n-1)^2p}\left[n\left(\frac{1}{p}-\frac{3}{\alpha y}\right)-\frac{(2n+1)}{k}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{y}\right)+\frac{n-2}{k^2}\right],$$

la quelle, ſi on la reſtreint à l'aberration des rayons partant du *centre* de l'objet qui eſt dans l'axe, en mettant $y=a$, ſe change en celle, que Mr. Klugel a donnée dans ſon excellent traité de Dioptrique.

2.) La partie de cette expreſſion, affectée de la quantite k eſt un *maximum* & conſequemment l'aberration un *minimum*, pour la valeur

$$\frac{1}{k}=\frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right).$$

Soit donc généralement

$$\frac{1}{k}=\frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)+Z,$$

& on aura pour l'aberration l'expreſſion

$$\frac{n\alpha^2x^2}{2(n-1)^2(n+2)p}\cdot\left[\frac{4n-1}{4p^2}+\frac{(n-1)^2}{a\alpha}+(n+2)^2Z^2\right]$$
$$=\Sigma+\frac{n(n+2)\alpha^2x^2}{n(n-1)^2\cdot p}\cdot Z^2;$$

ayant mis pour abreger la moindre aberration poſſible

$$\frac{n\alpha^2x^2}{2(n-1)^2(n+2)p}\left[\frac{4n-1}{4p^2}+\frac{(n-1)^2}{a\alpha}\right]=\Sigma,$$

qu'on tire de la formule précédente, en faiſant $Z=0$. La quantité k & conſequemment Z étant arbitraire: on peut, en introduiſant à la place de Z d'autres variables, qui ayent un rapport connu à la variable Z, donner de différentes formes

à l'expreſſion de l'aberration de ſphericité. C'eſt ainſi p. e. qu'en ſuppoſant dans l'expreſſion précédente

$$(n+2)^2 Z^2 = \frac{4n-1}{4p^2} v^2,$$

on en tire immediatement celle, dont Mr. Euler ſe ſert dans ſa Dioptrique; ſçavoir

$$\frac{\mu \cdot \alpha^2 x^2}{p}\left[\frac{\lambda+v}{p^2}+\frac{\nu}{a\alpha}\right]; \text{ ayant mis}$$

$$\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)}; \quad \nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1} \text{ \& on aura}$$

$$k = \frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)+\frac{v\cdot\sqrt{(4n-1)}}{2(n-2)p},$$

Or M. Euler ayant deſigné par λ ce que nous avons deſigné ici par $1+v^2$; ſi nous mettons pour abreger le facteur

$$\frac{\mu}{p}\left[\frac{\lambda}{p^2}+\frac{\nu}{a\alpha}\right] = P;$$

l'expreſſion de l'aberration ſera $P\alpha^2 x^2$, dans la quelle le cas du *minimum* eſt deſigné par la valeur $\lambda = 1$, comme il eſt deſigné dans l'expreſſion trouvée cy-deſſûs par la valeur $Z = 0$.

Fig. 4. 3.) Cette meme formule nous ſervira auſſi pour determiner l'aberration cauſée par la 2de lentille. L'effet de l'aberration cauſée par la premiere lentille conſiſte à faire naitre derriere cette lentille deux images de l'objet; l'image principale F, placée à la diſtance $AF = \alpha$, & l'image f placée à la diſtance $Af = \alpha - P\alpha^2 x^2$, enſorte, que ces deux images ſont placées devant la ſeconde lentille, la premiere à la diſtance $FB = b$, la ſeconde à la diſtance $fB = b + P\alpha^2 x^2$. La premiere, formée par des rayons infiniment proches à l'axe, n'etant ſujette à aucune aberration, fera naitre une image derriere la ſeconde lentille à la diſtance $BG = \beta = \frac{bq}{b-q}$. Pour ce qui regarde la ſeconde, formée par des rayons qui paſſent par l'extremité de l'ouverture de la premiere lentille: les formules précédentes nous determinent l'*aberration* de l'image,

mage, qui en nait derriere la ſeconde lentille; car Q deſignant pour la ſeconde lentille ce que P deſigne pour la premiere, enſorte que

$$Q = \frac{u'}{q}\left(\frac{\lambda'}{q^2} + \frac{\nu'}{b\beta}\right),$$

& mettant la diſtance de l'image principale du point f derriere la ſeconde lentille ou la diſtance $B G' = \beta'$, on n'a, qu'à ſubſtituer $b + P\,\alpha^2 x^2$, $\frac{b x}{a}$ (voy. II.) & β' à la place de y, x & α, & cette aberration ſera exprimée par

$$Q.(\beta')^2.\frac{b^2.x^2}{\alpha^2} = G' g,$$

donc $B g = \beta' - G' g$, & l'aberration totale derriere la ſeconde lentille ſera $g G = \beta - \beta' + G' g$. Or par les formules précédentes on a

$$\beta' = \frac{(b + P\alpha^2 x^2)q}{b + P\alpha^2 x^2 - q} = \frac{bq}{b-q} - \frac{q^2 P\alpha^2 x^2}{(b-q)^2} = \beta - \frac{\beta^2}{b^2}.P\alpha^2 x^2;$$

donc ſubſtituant cette valeur on a l'aberration totale derriere la ſeconde lentille

$$= \beta^2\left[P.\frac{\alpha^2}{b^2} + Q.\frac{b^2}{\alpha^2}\right].x^2.$$

& par un pareil calcul on trouvera celle derriere la troiſieme lentille

$$= \gamma^2\left[P.\frac{\alpha^2\beta^2}{b^2c^2} + Q.\frac{b^2\beta^2}{\alpha^2c^2} + R.\frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2}\right].x^2$$

& ainſi de ſuite. Ce qu'on appelle le *demidiametre de la confuſion* qui en reſulte dans la Viſion, n'entre pas *proprement* dans ce raccourci, vûque pour aneantir cette confuſion ou pour la rendre auſſi petite que poſſible, il faudra toujours rendre *l'aberration meme* egale à zero, ou la diminuer autant que les autres circonſtances le permettent, quelle que ſoit la maniere, qu'on ait choiſie pour *eſtimer* le degré de confuſion qui en eſt *ſentie* dans la Viſion, tandisque l'aberration n'eſt pas entierement anéantie.

Application des formules précédentes à la differente refrangibilité des rayons differemment colorés.

1.) Suppoſons, que dans les formules précédentes la quantité n qui exprime la loi de la refraction, ſoit tirée de la nature des rayons de *moyenne refrangibilité*, refractés par un verre d'eſpece donnée. Pour les appliquer à la determination de la route des rayons de la plus petite, & de la plus grande refrangibilité: on n'a qu'à rechercher les variations de ces formules, qui reſultent des variations de la quantité n, & de faire varier la quantité n de façon, que le rayon, dont la route eſt exprimée par ces formules, devienne le rayon rouge ou violet. Or les variations de la quantité n en produiſent une dans la *diſtance* de l'image principale derriere la lentille ou une aberration *longitudinale*, qui ſera $= \partial\alpha$, les variations de la quantité n etant conſiderées comme infiniment petites. Or les formules précédentes nous donnent immediatement

$$\partial\alpha = \frac{\alpha^2.\partial p}{p^2} = -\frac{\alpha^2.\partial n}{p(n-1)} \text{ à cauſe de } p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$$

& de là on trouve auſſi la variation de l'angle du rayon refracté avec l'axe de la lentille, ou l'aberration *angulaire*; car ayant trouvé $\psi = \frac{x}{\alpha}$, & par conſequant $\partial\psi = -\frac{x\,\partial\alpha}{\alpha^2}$, on aura $\partial\psi = \frac{x.\partial u}{p.(n-1)}$. Comme $\alpha + b$ eſt l'intervalle entre la premiere & la ſeconde lentille; cet intervalle etant conſtant, on a $\partial b = -\partial\alpha$. Or ſachant, que le rayon violet eſt le plus refrangible & que le rayon rouge l'eſt le moins; on a, en prenant la variation ∂n poſitive, la diſtance de l'image violette à la ſeconde lentille

$$b + \partial b = b - \partial\alpha = b + \frac{\alpha^2}{p}\cdot\frac{\partial n}{n-1},$$

& en prenant la variation ∂n negative, la diſtance de l'image rouge à la meme lentille $= b - \frac{\alpha^2}{p}\cdot\frac{\partial n}{n-1}$.

2.)

2.) Les images colorées de la plus grande & de la plus petite refrangibilité etant ainſi ſeparées: on n'a, qu'à appliquer à l'une & l'autre les formules précédentes. Soit donc la ſeconde lentille faite d'une eſpece de verre, pour la quelle la loi de refraction ſoit exprimée par n' pour les rayons de *moyenne* refrangibilité. La diſtance du foyer de la lentille pour les rayons moyens etant $= q$; celle pour les rayons violets ſera $q - q.\frac{\partial n'}{n'-1}$, & pour avoir l'aberration *longitudinale* de la ſeconde image ou la valeur de $\partial\beta$, on n'a, qu'à ſubſtituer dans l'expreſſion pour β à la place de β, b & q ces memes quantités augmentées de leurs differentielles; c'eſt à dire, à differentier l'equation $\beta = \frac{bq}{b-q}$ en ſuppoſant b & q variables; ce, qui donne

$$\frac{\partial\beta}{\beta^2} = \frac{\partial q}{q^2} - \frac{\partial b}{b^2}.$$

En prenant donc les variations ∂n & $\partial n'$ poſitives, on aura pour l'image violette

$$\frac{\partial b}{\beta^2} = -\frac{\partial n'}{q(n'-1)} + \frac{\partial\alpha}{b^2} = -\frac{\partial n'}{q(n'-1)} - \frac{\alpha^2}{b^2}\cdot\frac{\partial n}{p(n-1)}$$

& conſequemment l'aberration de refrangibilité pour l'image *violette* ou

$$\partial\beta = -\frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}\left[\frac{\partial n}{p(n-1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q}\cdot\frac{\partial n'}{(n'-1)}\right]$$

d'où, en prenant les variations ∂n & $\partial n'$ negatives, on a auſſi l'aberration de refrangibilité pour l'image *rouge*,

$$\partial\beta = \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}\left[\frac{\partial n}{p(n-1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q}\cdot\frac{\partial n'}{(n'-1)}\right]$$

& par un calcul ſemblable on trouve l'aberration *longitudinale* de l'image formée par la troiſieme lentille, ou

$$\partial\gamma = \pm\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{b^2c^2}\left[\frac{\partial n}{p(n-1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q}\cdot\frac{\partial n'}{(n'-1)} + \frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2 r}\cdot\frac{\partial n''}{(n''-1)}\right],$$

& ainſi de ſuite.

Donc afin que l'image formée p. e. derriere la troiſième lentille ſoit delivrée de toute confuſion cauſée par la differente refrangibilité des rayons colorés, il faut, que $\partial\gamma = o$. Conſequemment ſi les lentilles ſont faites de la meme eſpece de verre; à cauſe de $n = n' = n''$, il faudroit faire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{b^2 c^2}{a^2 \beta^2} = o;$$

mais, ſi les trois lentilles ſont faites de differentes eſpeces de verre, l'équation, à la quelle il faut ſatisfaire pour detruire cette aberration, eſt celle-cy:

$$\frac{\partial n}{p(n-1)} + \frac{b^2}{a^2 q} \cdot \frac{\partial n'}{(n'-1)} + \frac{b^2 c^2}{a^2 \beta^2 . r} \cdot \frac{\partial n''}{(n''-1)} = o.$$

Voici donc en raccourci les elemens principaux de la Theorie des objectifs compoſés, ainſi que les conditions, aux quelles il faudroit ſatisfaire dans leur conſtruction, pour les rendre achromatiques & les plus propres à etre appliqués aux Microſcopes; mais il s'agit d'y ſatisfaire, de la maniere la plus *favorable aux autres perfections*, aux quelles on eſt en droit de s'attendre dans un excellent inſtrument de cette eſpece.

PHYSI-

PHYSICA.

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Dissertatio VI.

PARS POSTERIOR.

VENTRICVLVS SINISTER.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 22 Iunii. 1786.

Ventriculus sinister. Dispositio fibrarum in vniuersum confirmata.

In sinistro ventriculo vix quidquam est, quod non fuerit confirmatum, nisi vt praeter ea, quae in Dissertatione IVta de fibris externis ventriculi sinistri notaueram, plura potius noua inuenerim, quae in primis cordibus non statim animaduerteram. *Dispositio fibrarum in vniuersum* ipsa eadem in singulis quae posthaec vidi, cordibus inuenta est; vt funes crassi ramificati in parte gibbosa prope basin *a*), planae confluentes dexterius ad crenam *b*), sinisterius ad marginem funiculi teretes *c*), radia-

a) Tab. IV. Q. D. R. Tab. I. 59. L. B.
b) Tab. IV. 73. 75. 79. 83. Tab. I. 89. 89.
c) Tab. IV. Q. R. Tab. I. 59. 86.

diatae demum fibrae verſus apicem *a*) in ſuperiori cordis ſuperficie, in inferiori vero longae ſubteretes fasciatae fibrae *b*), eſſent.

Varii ordines fibrarum confirmati. Ordo primus.

Ventriculi huius, ſicuti dextri, *limites*, *ortum*, *progreſſum*, *inſertionem*, fibrarum plane eadem in corporibus omnibus eſſe, vix opus eſt, vt moneam. Eo vsque enim ſtructura corporis humani non eſt variabilis, vt in his reliquae ſtructurae fundamentis etiam natura vacillet. Sed *ordines* quoque *quatuor* illi, in quos fibras externas ventriculi ſiniſtri diuideram, accurate vbique et ſimili modo diſtincti reperti ſunt. *Fibrae ordinis primi*, ortae a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, et ab interſtitio dimidio inter fila ſiniſtra, inſertae in poſteriorem, eamque maximam, partem ſtriae in vno atque in altero corde ſimili prorſus modo reperiuntur *c*). Progreſſu ſimili, ſimili directione, ſimilique ductu hae fibrae, ſimili modo inſertionis in ſtriam, ſimilibus in itinere connexionibus inter ſe, verbo proprietatibus ſimilibus omnibus, ita vt vnquam duae ſtructurae aliae quaecunque in duobus corporibus ſimiles reperiri poſſunt, in duobus his cordibus, vti in caeteris, quae vidi, apparent. Hoc ſolum intereſt: Vti ſtria in corde hoc poſteriori citius euaneſcit, partemque longitudinis ſuperficiei prope apicem vacuam relinquit; duae fibrae *d*) ordinis primi ex ſiniſtro in dextrum ventriculum per hanc ſedem tranſeunt, quae in corde primo in continuatam ſtriam inſeruntur. Reliquae huius ordinis, pariter duae tantum, ad priores ſe applicant *e*). Vt totam ſtriam

a) Tab. IV. 89. 98. 100. Tab. I. 96. 104. E.
b) Tab. VI. 13. 80. Tab. III. 17. 50.
c) Tab. VI. 9. 10. 11. 12. F. C. Tab. III. 6. 8. 10. 14. 17. 18. 19.
d) Tab. VI. 44, 45.
e) Tab. VI. 9. 10. 11.

am quidem, at non totam mediam ſuperficiei inferioris longitudinem, fibrae ordinis primi ſua inſertione occupent. Atque haec ſtructura omnino conſtantior mihi eſſe videtur.

Ordo ſecundus.

Pari conſtantia ſe ordo fibrarum ſecundus praebuit. Funibus is conſtat ſubteretibus, compreſſis, magnis *a*), ramificatis *b*), interſtitiis diſtinctis, peculiari genere fibrillarum nectentium repletis *c*), vti in caeteris, ſic in his cordibus citatis duobus. Oriuntur hi funes ab interſtitio dimidio anteriori inter bina fila cartilaginea ſiniſtra, a toto filo ſiniſtro anteriori, ab eius nodulo, ſiue radice, et a parte ſiniſtra baſis aortae *d*). In hoc quidem, vti ex citatis ſedibus apparet, duo maximi funes *e*), praeter columnam triangularem et fibras foſſae triangularis *f*), a baſi aortae oriuntur, quod et in aliis iam cordibus obſeruaui. In corde priori vnus ſolus funis *g*) aortae adhaeret; reliqua huius pars columna triangulari et foſſa occupatur. In vtroque corde ea obliquitate funes progrediuntur, vt marginem nacti, plus quam dimidiam eius partem poſteriorem occupent *h*). Simulque in ſede eadem in fibras reſoluti ſunt, vt inferiorem ſuperficiem intrando merae appareant ſimplices fibrae longae, ſatis craſſae quidem, at ſimiles inter ſe et aequales *i*). Praetereaque id habent commune, vt frequenter

a) Tab. IV. 47. 48. 49 51. 52. 60. 65. 69. Tab. I. 60. 61. 62. 64. 67. 70. 81. 82.
b) Tab. IV 52 54. 55. 60. 61 62. Tab. I. 70. 71. 72. 73.
c) Tab. IV 58. 63. Tab, I. 65. 68. 78.
d) Tab. V. 23 24. 25. 27. 30. 32. 43. 48. Tab. II. Y. 4. 3. D. B.
e) Tab. V. 43 48. Tab. IV. 60. 65.
f) Tab. V. 52. 53.
g) Tab. II. 21.
h) Tab. IV. 71. Tab. I 85. 85
i) Tab. VI. 13. 22. Tab. III. 17. 48.

a ſe mutuo ſecedant, interſtitiaque efficiant, oblonga, fibrillis repleta *a*). Inſeruntur demum in vltimam partem ſtriae, et in faſciculos, de quibus in ſequentibus dicam, aut ſi ſtria, brevior, fibris citius disperſis, ad apicem vsque non pertingit, in ſolos hos faſciculos. *b*).

Varia noua in ventriculo ſiniſtro poſterioribus experimentis reperta. Definitio funium ſingulorum, quo vsque conſtantes ſunt.

Praeter ea, quae ſimilia in hoc corde ſecundo cum corde priori et confirmata reperi, varia quoque noua obſeruata ſunt, quae vel minus diſtincte expreſſa in corde priori, minusque inſignia, apparuerant, quin pro rebus peculiaribus haberi potuerint, vel praeteruiſa ſunt a me, et poſterioribus demum obſeruationibus percepta. Haec, quae in ſecundo, tertio, et quarto fibrarum huius ventriculi ordine imprimis occurrunt, ſuis quaelibet locis addam. Deſcripſeram in Diſſertatione IVta ſingulos funes quidem ordinis ſecundi, vti ſe nempe in illo corde primo haberent; non credideram vero, vt conſtantes eſſent. Neque ſunt etiam omnino conſtantes poſterioribus periculis reperti, vt veluti faſciae ventriculi dextri, aut toti ordines ſiniſtri, ſine variatione iidem prorſus in variis cordibus reperirentur. Nec tamen vero penitus quoque variabiles ſunt, quin collectis conſtantioribus, reiectis reiiciendis, aliquomodo definiri hi ſinguli funes poſſent. Sunt ergo in iis: 1) *Funiculi*, aut *primae fibrae* ordinis ſecundi *c*). Hi ſatis ſimiles in ſingulis, vti in his cordibus duobus, ſede, longitudine, craſſitie, ductu, directione, apparent. Sunt quatuor vel quinque numero. Oriuntur conſtanter ab interſtitio dimidio anteriori inter

a) Tab. VI. 61. 63. 64. 60. 65. Tab. III. 14. 18. 21.
b) Tab. VI. 53. 68. 69. 75. Tab. III. 30. 35. 41
c) Tab. IV. 46. 47. 48. 49. 50. Tab. I. 59. 60. 61. 62.

inter bina fila ſiniſtra. Breues, ſimplices, absque fere ramificatione ad marginem arcuatim properant tranſeuntque in ſuperficiem inferiorem. Sequitur poſt illos 2°.) *funis*, quem dicas *magnum*, ſiue *diuiſum*, ſiue *laceratum a*). Conſtat quaſi ex duobus funibus, radicibus ſuis confluentibus. In corde priori duo cohaerentes eſſe videbantur; in hoc et in aliis vnus potius erat, omnium craſſiſſimus, qui tamen facile in duos dividi poterat *b*). Vocaui ob hanc cauſam magnum, vel diuiſum. Soletque cum ſequenti fune ramis anaſtomoticis coniungi *c*), et interſtitia formare, fibrillis repleta, *d*) quapropter laceratum dixi. In aliquot ramos ille porro diuiſus *e*) ad marginem progreditur. Tertius funis eſt, quem *ramificatum* dicas, cum in pluribus cordibus maxime inter omnes ramificatum illum inuenerim, quamuis in hoc corde ſimplicior ſit. *f*) Hanc ſimplicitatem maxime pro variatione habeo. In alio corde duplicem hunc funem reperi, alterum ſingulari modo ramificatum, alterum trifurcatum, ſimillimum ei, in corde priori *g*) reperto. Quartus denique et vltimus conſtituendus eſſe videtur, quem *funem applicatum* dixi, cum fibris primis, ex ponte productis, ſe applicet, cum iisque ſe ſoleat confundere *h*). Hic duplex eſt, vti ex citata tabula apparet, in corde priori. In corde eodem primo magnus, ramificatus, et bini applicati a filo cartilagineo ſiniſtro eiusque nodulo *i*),

a) Tab. IV. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. Tab. I. 64. 65. 66. 67.
b) Tab. V. 30. 32. 33. 38. 39.
c) Tab. V. 33. 35.
d) Tab. V. 42. 34. 37. Tab. I. 68.
e) Tab. IV. 54. 55. 56. Tab. I. 64. 66. 69.
f) Tab. IV. 60. 61. 62. Tab. I. 70. 71. 72. 73. 75. 76.
g) Tab. I. 70 71. 72. 73. 74.
h) Tab. IV. 65. 66. 70. Tab. I. 81. 82. 83. 84.
i) Tab. II. 21. 22. 23. 24. 25.

in hoc ſecundo ſolus magnus a filo *a*), ramificatus et applicatus a baſi aortae et principio crenae *b*), oriuntur. Huiusmodi ſunt varietates in funibus. Nec tamen vnquam hactenus, quos non funiculos minores, aut magnum atque diuiſum, aut ramificatum, ſede et ordine, aut applicatum, vocarem, reperi, nec vnquam quisquam ex his; in iis, quae hactenus vidi, cordibus defuit. Duplex tamen vnus vel alter inuentus eſt, vti et interiectas fibras duplices, et duplicem pontem, repertos eſſe monui; vt id quidem, genera fibrarum varia duplicia inueniri, ſolitum fere eſſe videatur in cordis ſtructura.

Varia in primis experimentis neglecta, accuratius nunc inquiſita. Tranſitus funium ſuper marginem, eorumque inſertio.

In corde primo, cum omnia adhuc noua mihi eſſent, ipſaque haec noua innumerabilia fere et immenſa viderentur, vix fieri potuit, quin quaedam notabilium neglexerim, vt alia eo accuratius notarem. Sic factum eſt, vt fibras quidem ſingulas ventriculi ſiniſtri a filo, ab aorta et crena ad marginem vsque in ſuperiori ſuperficie, et rurſum a margine ad ſtriam in inferiori, quantum fieri poterat, proſequerer, ad continuationem vero earundem ex ſuperiori ſuperficie ſuper marginem in inferiorem animum minus aduerterem. Hinc varia incommoda naſcebantur. Non certum erat, vtrum immutatae fibrae ex altera in alteram ſuperficiem tranſirent, an confluendo ſpeciem futurae forte, ſimilem crenae, efficerent, ex qua nouae quaſi fibrae orirentur. Non ſatis accurate conſtabat, quaenam fibrarum ſuperficiei inferioris ex funibus, quaenam ex ordine tertio continuatae eſſent vel quarto. Neque quam partem ergo

a) Tab. V. 32.

b) Tab. V. 43. 48. u. Tab. IV. 65. 66.

go fibrae funium quoque in inferiori ſuperficie cordis, quamque regionem occuparent, exacte determinari poterat. Neque tandem mihi ipſi ſatisfacere poteram, niſi ſingulos funes, ſingulasque memorabiles fibras ab ortu ad finem vsque proſecutus, meisque oculis et digitis comitatus eſſem; cum ſemper timerem, ne fibris in hac itineris parte aliquid accideret ſingulare, quod me fugeret. Proximis ergo periculis, quam potui accuratiſſime, in eam rem inquiſiui. Notaui ad icones, quaenam in inferiori, quae in ſuperiori, ſuperficie eae fibrae erant ſingulae, quas in corde praeparato in ſe mutuo continuare videram, ſic progreſſum non modo ſingulorum funium ad extremos fines vsque, ſed inſertionem quoque eorum accuratius determinare potui. Antequam vero haec exponam, de ipſa hac ſede inſertionis funium alias referre oportet haud ponderis minoris obſeruationes nouas. Concernunt faſciculos illae, quos, minus inſignes procul dubio, minusque diſtincte expreſſos, praeteruideram in corde priori, in hoc maxime inſignes reperi, et accurate pinxi. *a*) Dixi *terminales* illos, cum fibras ventriculi ſiniſtri terminent et ordini imprimis ſecundo et tertio ſedem inſertionis in inferiori ſuperficie cordis largiantur *b*).

Sedes faſciculorum terminalium. Vallecula.

In medio interſtitio inter binos apices ventriculorum conſtanter *vallecula* eſt, haud innota anatomicis, cum etiam in corde, membrana induto, ſatis notabilis nonnunquam appareat, Hallero recte *vallecula* dicta. Maior haec profundiorque et inſignior eſt, ſi magis, velut in hoc corde, apices ventriculorum

a) Tab. VI. 4. 5 — 6. 7 — 8. Tab. IV. 104 — 103 — 99. 100.
b) Tab. VI. 53. 55. 68. 69. 72. 75.

rum prominent, *a*) leuior, ſi minus illi diſtincti, ſicut in corde priori *b*). In ſuperiori ſuperficie cordis vallecula ſimplex interſtitium ſatis latum eſt inter binos prominentes apices *c*). In inferiori vero praeter idem interſtitium *d*) vallecula ad aliquam notabilem longitudinem in ſuperficiem continuat *e*). Planus enim compreſſus apex ventriculi dextri papillaris *f*) parte latiore *g*) innatus eſt globoſae ſuperficiei apicis ventriculi ſiniſtri *h*), vltima ſui parte *i*) prominendo. Sic dum ſiniſtro apici margine ſuo, ſatis craſſo, prominente, ſiniſtro, dexter incumbit, inſigniter eminet ſuper ſiniſtri ſuperficiem, valleculamque ea ratione *k*), interſtitio continuam, efficit.

Margines ventriculorum prominentes.

Si ſtria totam longitudinem cordis in inferiori ſuperficie emetitur, ſtria et crena in hac vallecula concurrunt et finis ſtriae in ea ſede cenſetur ad inferiorem, *l*) crenae ad ſuperiorem, *m*) ſuperficiem. Si vero, velut in hoc corde, ſtria citius euaneſcit; reliqua longitudinis cordis in inferiori ſuperficie pars vacua fibras ventriculi ſiniſtri in dextrum tranſire ventriculum permittit, vnamque communem efficere in ea ſede

---

a) Tab. IV. E. Tab. VI. 101.
b) Tab. I. D.
c) Tab. IV. E. P. T.
d) Tab. VI. 101. 80. 100.
e) Tab. VI. 6. 8.
f) Tab. VI. 6. 8. 100. 95.
g) Tab. VI. 6. 8.
h) Tab. VI. 6. 5.
i) Tab. IV. 8. 100.
k) Tab. VI. 5. 6. 8.
l) Tab. III. 32.
m) Tab. I. D.

ſede ventriculorum ſuperficiem *a*). Siue ad valleculam vero vsque ſtria continuet, ſiue citius euaneſcat, margo vtriusque ventriculi, quilibet ſuper apicem ſui ventriculi continuando, ad valleculam curuatus redit *b*), in eaque vna cum crena et ſtria, ſi haec poſterior eo vsque peruenit, vterque concurrit. Sic aliqua marginis pars in ventriculo vtroque inter ipſum apicem ventriculi, id eſt partem eius maxime prominentem, *c*) et valleculam *d*) continetur *e*), quae aliter atque reliquus margo, non dextrorſum in dextro ventriculo, ſed ſiniſtrorſum, aut ſiniſtrorſum et antrorſum oblique, in ſiniſtro non ſiniſtrorſum, ſed dextrorſum, aut dextrorſum oblique et antrorſum, ſpectat, aliumque quaſi, a proprio maiori cuiusque ventriculi, ſiniſto ſiniſtri, dextroque dextri, diuerſum vtriusque ventriculi marginem efficit, *prominentem* ſcilicet *dextrum* ſiniſtri ventriculi quem dicas, et *ſiniſtrum prominentem* dextri, qua nempe appellatione parui hi margines a marginibus, quibus ad crenam et ſtriam ventriculi cohaerent, diſtinguuntur. Margo ergo prominens dexter ventriculi ſiniſtri *f*) totus ipſa ſedes eſt faſciculorum terminalium huius ventriculi, quam ſecundum longitudinem a vallecula ad apicem ventriculi vsque procurrendo occupant.

Faſciculi terminales ventriculi ſiniſtri.

Sunt tres faſciculi terminales ventriculi ſiniſtri, quos ſi numero diſtingueres, neſcires, quem primum, aut quem tertium

a) Tab. VI. 44. 45.
b) Tab. VI. 80. 7. 6 — 100. 8. 6.
c) Tab. IV. T. P. Tab. VI 80. 100.
d) Tab. IV. E. Tab. VI. 101. 6.
e) Tab. IV. E. P. — E. T. Tab. VI. 80. 7. 8. 6 — 6. 100.
f) Tab. VI. 4. 6. 7 80. Tab. VI. E. T.

tium potius, dicas; cum, qui primus omni reſpectu in ſuperiori ſuperficie eſt *a*), tertius ſit omni reſpectu in inferiori *b*); primus contra procul omni dubio in inferiori *c*), qui tertius in ſuperiori ſuperficie eſſe videtur *d*). Dixi *ſuperiorem*, qui maxima ſui parte in ſuperiori ſuperficie ſitus eſt *e*), in eaque magnitudine et inſertione, quam in ea ſuperficie habet, primarius eſſe videtur, *inferiorem*, qui maximam partem in inferiori ſuperficie verſatur *f*), atque in ea magnitudinis et ortus reſpectu primarius eſt, *medium*, qui medius inter illos continetur, et dimidius in qualibet ſuperficie exiſtit *g*). Oriuntur in inferiori ſuperficie ex vallecula teretes compreſſi ſubventricoſi muſculi in hoc corde *h*), pollicem cum dimidio longi, tres vel quatuor lineas craſſi, principiis anguſtioribus, firmioribus, quaſi ſubtendineis. Progrediuntur inde ſecundum marginem prominentem dextrum ventriculi ſiniſtri, quem tegunt *i*), ad apicem vsque huius ventriculi *k*), in quem ad ſuperiorem ſuperficiem inſeruntur *l*). Ductu ergo obliquo, longitudinali tamen, reſpectu marginis, ductui proximo, procedunt, vt, orti in inferiori ſuperficie cordis, oblique ſuper marginem flexi *m*), in ſuperiorem tranſeant ſuperficiem *n*), in eaque ſuam ſedem inſertionis habeant.

Faſci-

---

a) Tab. IV. 99. 100.
b) Tab. VI. 8.
c) Tab. VI. 4. 5.
d) Tab. IV. 104.
e) Tab. IV. 99. 100. Tab. VI. 8.
f) Tab. VI. 4. 5. Tab. IV. 104.
g) Tab. IV. 108. Tab. VI. 6. 7.
h) Tab. VI. 4. 5 — 6. 7 — 8.
i) Tab. VI. 4. 5. 6. 7. 8. Tab. IV. E. 103. 104. T.
k) Tab. VI. 80. Tab. IV. T.
l) Tab. IV. 100.
m) Tab. VI. 5. 7. 8.
n) Tab. IV. 99. 100. 103. 104.

Faſciculus terminalis ventriculi dextri.

His tribus faſciculis terminalibus ventriculi ſiniſtri quartus in hoc corde accedit *dextri ventriculi faſciculus terminalis a)*, qui tamen, cum in nullo adhucdum alio cum corde praeter hoc repererim, pro rariori ſtructura habendus eſſe videtur. Oritur hic pariter in inferiori cordis ſuperficie ex vallecula, iuxta terminales ventriculi ſiniſtri, tenuior faſciculus, principio paulo craſſior *b)*, inde in ſimplicem ſenſim extenuatus fibram *c)*. Deſcendit inde in eadem ſuperficie ad marginem prominentem ſiniſtrum ventriculi dextri vsque ad apicem eius *d)*. Ibi oblique flectitur in ſuperiorem ſuperficiem *e)*, vltimam in ea fibram efficiens ventriculi dextri, praecedentibus caeteris aequalem, et inſeritur in crenam. Dum ex vallecula ortus ad apicem vsque in inferiori ſuperficie iuxta marginem deſcendit, vltimae fibrae ventriculi dextri, quae hactenus primo a ſtria, deinde ex fibris ventriculi ſiniſtri continuatae, ortae erant, ab eo faſciculo terminali oriuntur *f)*.

Faſciculus terminalis ventriculi ſiniſtri ſuperior.

Superior faſciculus terminalis ventriculi ſiniſtri g), vti tertius ordine in inferiori ſuperficie eſt, ſub medio in hac ſuperficie ex vallecula oritur, principio ſatis lato *h)*, mediae parti faſciculi terminalis dextri ventriculi *i)* innato; ita vt pro-

 prie

a) Tab. VI. 98. 100.
b) Tab. VI. 98.
c) Tab. VI. 100.
d) Tab. VI. 100.
e) Tab. IV. P.
f) Tab. VI. 99. 100.
g) Tab. VI. 8. Tab. IV. 99. 100.
h) Tab. VI. 8.
i) Tab. VI. 98. 100.

prie a media huius faſciculi parte oriatur. Ipſo in eo principio iam ita poſitus eſt, vt vna cum margine ſui ventriculi prominente oblique ſiniſtrorſum antrorſum, haud deorſum cum inferiori cordis ſuperficie, reſpiciat, proinde, neque in inferiori, neque in ſuperiori, cordis ſuperficie, ſed in ipſo margine, hac ſui parte collocatus exiſtat. Sic ortus continuo flectitur, in ſuperioremque prodit ſuperficiem *a*), in quam quaſi attractus, primo ſurſum et retrorſum fibris ſuis contra crenae ductum, dein ſiniſtrorſum flexus progreditur ſubuentricoſus paulatim extenuatus muſculus, formatoque arcu, transuerſim poſito, in extremitatem acutam, vnciformem, *b*) abit, quae in extremitatem, pariter vnciformem, funiculi, quem in ſequentibus dicam, procurrentis breuis *c*) inſeritur.

Faſcicuius terminalis medius.

Faſciculus terminalis medius d) ad eandem inferiorem ſuperficiem ex vallecula ſuper priorem a principio faſciculi terminalis dextri ventriculi oritur, *e*) ita ſcilicet, vt amborum horum muſculorum capita profunde ſint carni cordis innata. Progreditur hinc ſecundum longitudinem obtuſi craſſique marginis prominentis dextri ventriculi ſiniſtri. Denique flectitur oblique circa illum *f*), proditque in ſuperiorem ſuperficiem *g*), in qua oblique paulisper adſcendit, inſeriturque fibris muſcularibus latis in concauum marginem arcuati funiculi ſuperioris.

Funi-

---

a) Tab. IV. E. 99.
b) Tab. IV. 100. T.
c) Tab. IV. 101.
d) Tab. VI. 6. 7. Tab. IV. 103.
e) Tab. VI. 6.
f) Tab. VI. 7.
g) Tab. IV. 103.

Funiculus terminalis inferior.

Funiculus terminalis inferior a) ad finem ſuperficiei inferioris cordis, proxime ſuper initium valleculae, oritur principio craſſo capitato *b)*, carni cordis innato. Progreditur inde ſecundum longitudinem marginis prominentis *c)*. Hic vix flexus in ſuperiorem ſuperficiem prodit. Parua ſui parte et extremitate in ea apparet *d)*, et continuo prope apicem ventriculi, partim in funiculum medium, partim in extremitatem funiculi ſuperioris iuxta medium, inſeritur. Vt ſuperior ergo in extremitatem vnciformem funiculi procurrentis breuis, medius in ſuperiorem, inferior in medium partim, partim in ſuperiorem, ſit inſertus.

Variationes faſciculorum terminalium.

Haud ſemper tam inſignes hos faſciculos, eorumque, quam efficiunt, ſtructuram, et tam pulchram, quam in hoc corde, reperi. Conſtans tamen omnino eſt, et quamuis minores breuioresque fibras, nunquam nullas tamen poſthaec, quae munere terminalium fibrarum fungerentur, inueni. In aliquo corde tres fibrae, ſatis craſſae, notabiles, terminales erant peculiari ſtructura. Oriebantur capitatis craſſioribus principiis in inferiori cordis ſuperficie ex ventriculo dextro, prope marginem eius dextrum. Deſcendebant inde oblique per valleculam verſus apicem ventriculi ſiniſtri; vt communes hae tres fibrae ſingulares recta ex altero in alterum tranſirent ventriculum, atque coniungerent vtrumque. Vbi per valleculam tranſiebant, flexae ſimul in ſuperiorem, ſiniſtri ſcilicet ventriculi,

a) Tab. VI. 4. 5. Tab. IV. 104.
b) Tab. VI. 4.
c) Tab. VI. 5.
d) Tab. IV. 104.

ſuperficiem adſcendebant; vt a margine dextro ventriculi dextri per inferiorem huius ventriculi ſuperficiem et porro per valleculam in ſuperiorem ventriculi ſiniſtri progreſſus eſſet, et continuatio vsque ad eiusdem ventriculi apicem; vbi, ſicut in hoc corde, in procurrentem funiculum breuem inſerebantur; ea nempe ratione, vt, tertia quae erat in inferiori ſuperficie et breuiſſima, prima et longiſſima in ſuperiori, in procurrentem tranſiret ipſa, extremitate ſolita vnciformi; ſecunda et prima, longiores in inferiori ſuperficie, breuiores in ſuperiori in illam inſererentur. In alio corde a fibris, ex ventriculo ſiniſtro in dextrum per eam regionem, vbi ſtria deficiebat, tranſientibus, ea ratione oriri vidi tres breues, at ſatis craſſos, faſciculos, vt ſub iis fibris quaſi prodire viderentur. Hi fere recta ad ductum ſtriae per valleculam deſcendebant, flexique in ſuperiorem ſuperficiem ventriculi ſiniſtri, dextrorſum verſi, ad procurrentem breuem progrediebantur. Vt omnino ergo conſtans ſit haec ſtructura faſciculorum terminalium, qui duobus, ſecundo et tertio, ordinibus fibrarum ſedem inſertionis praebent, ipſique poſtea ſe quarto fibrarum ordini loco vltimarum fibrarum adjungunt, in earumque propriam inſertionis ſedem, funiculum procurrentem breuem, vna cum iis ſe inſerunt; quamuis eam in primo corde non perceperim, aut pro aliqua ſingulari ſtructura cognouerim.

Inſertio fibrarum omnium ordinum accuratius deſcripta.

Inſertio fibrarum ordinis primi.

Expoſitis his ſtriae natura et variationibus, faſciculisque terminalibus ventriculi ſiniſtri, omnium huius ventriculi fibrarum inſertio multo nunc accuratius definiri poterit. Fibrae ordinis primi, ortae a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, et dimi-

dimidio interſtitio inter bina fila ſiniſtra *a*), inſeruntur in hoc corde in totam ſtriam *b*), quo vsque ſe haec extendit; deinde vel vna, vix duae fibrae, *c*) tranſeunt in fibras ventriculi dextri. Sequens fibra *d*) tranſit in principium faſciculi terminalis inferioris *e*) et, quae reliquae demum ſunt, tres vltimae *f*) ad priorem, in faſciculum inſertam, ſe applicant. *g*) Vt totam ſtriam ergo, quo vsque ſe haec extendit, et reliquam porro longitudinis ſuperficiei inferioris partem, ad valleculam, ſeu principium terminalis faſciculi inferioris, vsque, fibrae ordinis primi ſua inſertione occupent *h*); reliquis, quaecunque inferiorem ſuperficiem intrant, fibris ſolus ille faſciculus terminalis inferior pro ſede inſertionis ſuperſit. *i*). In corde priori haud totam ſtriam quidem, at partem tamen longitudinis cordis in inferiori ſuperficie aequalem ei, quam ſtria in hoc corde occupat, fibrae ordinis primi ſua inſertione occupabant; cum ſtria, multo longior, ad extremum finem ſuperficiei inferioris vsque ſe extenderet. Vti vero ſtriae ſtructura, qua deſinit ad aliquam a vallecula diſtantiam, omnino frequentior conſtantiorque eſt; ſine vllo dubio ſtatui poteſt, fibras ordinis primi ſua inſertione totam occupare ſtriam, reliquas ſuperficiei inferioris fibras redire ad terminalem faſciculum inferiorem.

Fibra-

---

a) Tab. VI. F. 9. 10. 11. 12. C.
b) Tab. VI. 30. 32. 35. 39. 41.
c) Tab. VI. 44. 45.
d) Tab. VI. 43.
e) Tab. VI. 46.
f) Tab. VI. 47. 49.
g) Tab. VI. 48. 50. 52.
h) Tab. VI. 9. 10. 11. 12.
i) Tab. VI. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.

Fibrarum ordinis ſecundi inſertio.

Fibrae *ordinis ſecundi*, ſeu funium, primo transuerſim fere *a*) ab interſtitio inter fila cartilaginea ſiniſtra, et ab extremitate fili anterioris verſus marginem progrediendo, poſtremam partem gibboſam marginis occupant *b*); magis deinde magisque oblique a filo verſus eundem deſcendendo plusquam dimidiam partem eius in ſuperiori iam ſuperficie occupant *c*). Vbi ſuperata marginis craſſitie ad inferiorem ſuperficiem in ipſo margine apparent *d*), plus quam tres quartas partes iam eius obliquo et fere longitudinali ſuo progreſſu nactae ſunt. Hinc plane ad longitudinem marginis porro progrediendo *e*) etiam reliquam eius quartam partem ad apicem ventriculi vsque occupant, adeo, vt fibris ordinis tertii nullus porro tranſitus ad inferiorem ſuperficiem pateat, fibraeque ordinis ſecundi omnem, a primo ordine vacuam, partem ſuperficiei inferioris occupent. *f*) Sic partem quaſi dimidiam exteriorem, longiorem, ſuperficiei inferioris tegendo, ductu, margini conformi, fibrae ordinis ſecundi recta in faſciculum incurrunt terminalem inferiorem *g*), in eumque inſeruntur, totam eius longitudinem occupando, exceptis ſolis extremitatibus, inferiori *h*) et ſupe-

a) Tab. IV. 46. 47.
b) Tab. IV. 46. 47. 48.
c) Tab. IV. Q. R.
d) Tab. VI. 13. 22.
e) Tab. VI. 23. 75. Hae fibrae prope apicem ventriculi (Tab. VI. 24. 76. 28. 29.) vt appareant in icone, in ſuperficiem inferiorem pulſae ſunt, et ita pictae. In ſitu ſuo naturali in ea ſuperficie non apparent, cum fibra (24. 76.) ipſum marginem ad inferiorem ſuperficiem teneat, reliquae (25. 26. 27. 28. 29.) in medio margine, et in ſuperiori ſuperficie partim, ſint ſitae.
f) Tab. VI. 46. 47. 48. 49. 50.
g) Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75.
h) Tab. VI. 4[illegible]

ſuperiori *a*). Haec generatim continuatio et decurſus fibrarum ordinis ſecundi per inferiorem cordis ſuperficiem, earumque inſertio, eſt. Conſideremus iam ſpeciatim ſingulorum funium continuationes.

In ſpecie funiculorum.

Funiculi, ſeu primae fibrae ordinis ſecundi *b*), dum ſuper gibboſam ventriculi, poſtremamque marginis, partem tranſeundo in inferiori ſuperficie apparent *c*), ductu deſcendendo longitudinali, variis modis et diuiduntur et confluunt *d*), vt interſtitia efficiant, fibrillis repleta *e*). Denique magis magisque concurrendo in paucas fibras abeunt, quibus in poſteriorem partem funiculi terminalis inferioris inſeruntur *f*), praecedentibus fibris *g*), ab interſtitio inter fila cartilaginea ſiniſtra productis *h*), ad vltimas ordinis primi fibras *i*) partim applicatis *k*), partim vna cum illis in ipſum principium fasciculi inſertis *l*).

Fibra-

a) Tab. IV. 101.
b) Tab. IV. 46. 47. 48. 49. 50.
c) Tab. VI. 13. 14.
d) Tab. VI. 57. 59. 62.
e) Tab. VI. 61. 62.
f) Tab. VI. 53.
g) Tab. VI. 52.
h) Tab. VI. 51.
i) Tab. VI. 46.
k) Tab. VI. 52.
l) Tab. VI. 52.

Fibrarum funis magni.

Fibrae, ex fune magno a) reſoluto continuatae *b)*, ſimplices longae fibrae in inferiorem prodeunt ſuperficiem *c)*. Eaedemque fibrae continuant *d)* arcuatim et conformiter margini vsque ad fasciculum terminalem inferiorem, in eiusque mediam partem inſeruntur *e)*.

Fibrarum funis ramificati.

Fibrae, a ramificato f) productae fune *g)*, ſimiles in inferiori ſuperficie, dum tranſeunt in eam, longae, aequales fibrae apparent *h)*, ſimili continuatae ductu ad terminalem vsque faſciculum inferiorem, in cuius partem, quaſi quartam aut quintam, haud procul ab extremitate anteriori, inſeruntur *i)*. Diſtinguuntur hae fibrae in margine, et in inferiorem ſuperficiem dum intrant, inſigni interſtitio, fibrillis repleto, tum poſterius a fibris funis magni *k)*, tum anterius a ſequentibus applicati funis fibris *l)*.

Fibrarum funis applicati.

Denique *fibrae, ex fune applicato m)* continuatae *n)*, pariter aequales, ſimplices, longae, dum prodeunt in inferiorem

---

a) Tab. IV. 51. 52.
b) Tab. IV. 54. 55. 56.
c) Tab. VI. 15. 16.
d) Tab. VI. 66. 67.
e) Tab. VI. 68. 69.
f) Tab. IV. 60. 61. 62.
g) Tab. IV. 61. 62.
h) Tab. VI. 18. 19.
i) Tab. VI. 72.
k) Tab. VI. 17.
l) Tab. VI. 20.
m) Tab. IV. 65.
n) Tab. IV. 70. 71.

rem ſuperficiem, apparent *a*), ſimilique, margini conformi, ductu, paulisper magis transuerſo, ea procedunt ratione, vt primae earum in praecedentis funis ramificati fibras *b*), vltimae tandem in finem anteriorem, ſeu ſuperiorem, fasciculi terminalis inferioris inſerantur *c*). Etiam hae fibrae tum a praecedentibus, tum a ſequentibus, fibris interſtitiis *d*) diſtinctae ſunt.

Confirmatio fibrarum ordinis tertii.

Vti ſingulae dextri ventriculi fasciae, ordinesque hactenus ſiniſtri, primus atque ſecundus, vti deſcripti erant ex corde primo, in hoc ſecundo corde, ſicuti et in reliquis, quae poſtea inquiſiui, ſimiles omnino et confirmati reperti ſunt; ſic *tertius quoque* et *quartus fibrarum* ventriculi ſiniſtri *ordo* in hoc, vti in primo corde ſe habent; modo vt accuratius has fibras omnes in hoc ſecundo corde inquiſiuerim, multaque noua, in primo praeteruiſa, aut neglecta, detexerim. Tertii ergo ordinis fibrae, ex pontis regione productae, continuatae oblique ad marginem, ad evndemque ſecundum longitudinem progredientes verſus apicem cordis, et prope eum inſertae, in vno atque in altero corde ſe ſimili modo habent *e*). Verum diſpoſitio omnium fibrarum huius ordinis, earum decurſus et inſertio tam multa habent ſingularia, quae in primo corde non perceperam, quaeque hunc ordinem multo accuratius definiunt, a vicinisque ſecundi et quarti ordinis fibris diſtinguunt, vt novam deſcriptionem omnino mereantur.

a) Tab. VI. 21. 22.
b) Tab. VI. 74. a.
c) Tab. VI. 75.
d) Tab. VI. 20. 23.
e) Tab. I. 82. 87. 85. 84. 88. 85. 86.
Tab. IV. 73. 73. 74. 75. 77. 78. 79. 81. 82.

Earum descriptio noua. Funiculus procurrens longus.

Oriuntur hae *tertii ordinis fibrae*, vti recte dictum erat in priori descriptione, a fibris, ex pontis regione productis, quibus funis porro applicatus *a*) aliqua sui parte *b*) accedit. Progrediuntur quoque oblique marginem versus *c*). Tunc vero minime transeunt super marginem, nec tangunt inferiorem superficiem, quam prorsus fibrae ordinis secundi occupant replentque. Verum datur in iis fasciculus teretiusculus, ex primis pontis fibris et accedente funis applicati portione productus, qui prima pars est ordinis tertii, eumque a secundo ordine distinguit, notabilis omni respectu *d*). Hic, ortus a crena continuo sub cono arterioso et ex prima parte pontis ipsius, qua margo eius posterior efficitur, et cui tum portio applicati accedit *e*), descendit inde, conformis ductui funium, oblique sinistrorsum antrorsum ad marginem *f*), funes a fibris tertii ordinis distinguendo. Sic ex planiori et latiori sensim angustior et teretior fasciculus factus, vbi ad marginem peruenit, recta antrorsum versus apicem curuatus in ipso eo margine sinistro crasso ventriculi, propior superiori superficiei primo, deinde sensim versus inferiorem inclinando, progreditur *g*), et continuat in eo vsque ad apicem ventriculi, vbi in extremitatem superiorem fasciculi terminalis inferioris *h*) inseritur *i*). Vti longissimus hic funiculus omnium fibrarum ordinis tertii ad apicem ventriculi vsque continuat, cum ceterae huius ordinis fibrae nonnisi ad

a) Tab. I. 82. 83. Tab. IV. 65. 66.
b) Tab. IV. 69. 72.
c) Tab. I. 84. 88. Tab. IV. 75. 77. 79. 82.
d) Tab. IV. 73. 73. 73. 74. 74.
e) Tab. IV. 73. 66. Tab. I. 82. 87.
f) Tab IV. 73. 73.
g) Tab. IV. 74. 74.
h) Tab. IV. 104.
i) Tab. IV. 105.

ad marginem vsque perueniant, *procurrentem* illum *funiculum* vocari poſſe cenſeo. Cum vero et alius, omnino ſimilis, in ordine quarto detur, breuior, at pariter ad apicem ventriculi tamen vsque procurrens *a*); *longus* ille, ſeu *maior*, hic *breuis*, ſeu *minor*, appellabitur.

Fibrae reliquae. Diuiſio crenae.

Reliquae fibrae ordinis tertii, a reliqua parte pontis *b*), et quae porro a ponte ſequitur, crenae parte, ad procurrentem breuem vsque *c*), oriuntur. Quum in aliis cordibus, vbi duplex pons fuit, ſecundus eam crenae partem occupare ſoleat; *regionem pontis* totam hanc crenae partem quam pons occupat, et quae porro poſt pontem ad procurrentem breuem vsque ſequitur *d*), appellare conuenit; vt fibrae ergo ordinis tertii ex pontis regione generatim oriantur. Quamuis nec longum nec breuem procurrentem funiculum in corde primo obſeruaueram, nihil tamen facilius fuit, quam cognoſcere vtrumque in icone, modo vt continuationes eorum ad marginem ventriculi non ſint expreſſae, quae, vt appareant in eo, omnino neceſſe eſt, vt oblique paulisper a latere ſiniſtro cor intuearis. Longus ergo procurrens funiculus in corde primo, quo vsque in ſuperiori ſuperficie verſatur, ille eſt, quem fibrae efficiunt pontis primae cum accedente fune applicato *e*), ad marginem vsque continuatae. Breuis procul dubio, qui fibris producitur *f*), ex ea parte crenae ortis, in quam fibrae angulares ex dextro ventri-

a) Tab. IV. 83. 84. 85.
b) Tab. IV. 76. Tab. I. 87.
c) Tab. IV. 78. 79.
d) Tab. IV. D. H. Tab. I. L. 21.
e) Tab. I. 82. 87. 84.
f) Tab. I. 94. 96. 95.

culo inſeruntur *a*). Sic pontis regio ergo in corde priori ea eſt, quae inter vtrumque funiculum continetur *b*). Quum et procurrentes funiculos et dictam pontis regionem conſtanter in cordibus, quae inquiſiui, repererim; tota crena in tres partes conſtanter diuiſa eſt, quarum prima, *poſtrema*, ea eſt, quae marginem coni arterioſi ſiniſtrum efficit *c*), quae exigua in primo corde, in plerisque pollicem ſaltim longa, in hoc inſigni longitudine non modo, ſed propterea quoque notabilis exiſtit, quod eleuato cono ſuperficies ventriculi ſiniſtri ſuperior *d*) non in dextri ventriculi, ſed in ſepti ſuperficiem dextram *e*), per hanc crenae partem continuat. Huic ſolus applicatus funis latere ſuo adhaerere ſolet *f*), nec aliae fibrae ab ea parte crenae oriuntur. Terminatur anterius ponte et procurrente funiculo longo *g*). Secunda pars crenae *media* eſt, ſeu *regio pontis*, quae pontem, ſi quis exiſtit, aut, ſi duo ſunt, ambos, et reliquam partem crenae ad funiculum procurrentem breuem vsque, complectitur *h*). Haec fibris latis ventriculi dextri, pulmonalibus, interiectis et fasciae magnae, ſaepius quoque parti angularium reſpondere ſolet. Ordo fibrarum tertius ab ea crenae parte oritur. Terminatur anterius funiculo breui. Tertia pars crenae *anterior* eſt, ſeu *regio radiata i*). Haec tenuibus ventralibus fibris ventriculi dextri reſpondet. Incipit a procurrente breui, quem ipſum complectitur, extendit ſe vsque ad valleculam. Ex hac quartus ordo fibrarum oritur.

Fibra-

---

a) Tab. I. 20. 22. 28.
b) Tab. I. 87. 17. 17. 17, 21.
c) Tab. I. C. L. Tab. IV. C. D.
d) Tab. V. 48. u.
e) Tab. V. 52. 54. v.
f) Tab. V. 48.
g) Tab. IV. x. 72 73.
h) Tab. I. L. 87. 17. 17. 17. 21. Tab. IV D. 73. 75. 79.
i) Tab. I. 94. 96. 97. 99. D. Tab. IV. 83. 85. 90. 95. E.

Fibrarum tertii ordinis ortus, progreſſus, inſertio.

Itaque ex tota pontis regione fibrae ordinis tertii oriuntur, ea ratione, vt ex primis fibris pontis ipſius, quibus et aliqua applicati funis portio accedit, procurrens longus, ceterae fibrae ex ſequenti reliqua pontis regione producantur. Procurrens, vti dictum eſt, ad marginem ventriculi ſiniſtri ſecundum longitudinem progreditur, et prope apicem in extremitatem ſuperiorem terminalis fasciculi inferioris ſe inſerit. Reliquae fibrae analogo ductu cum procurrente longo per ſuperiorem ſuperficiem ventriculi progrediuntur ad marginem vsque *a*). Ibi in procurrentem longum incurrunt *b*). Videntur terminari et inſeri in eum funiculum, ſicuti id ſolitum fuit in fibris ventriculi dextri. Verum probabile potius eſt, continuare ſub procurrentem, ita tamen, vt ſe ſub illo recipiant quidem, at, curuatae pari modo, in inferiorem ſuperficiem minime tranſeant, ſed ſub procurrente apicem verſus progrediantur, ſub eoque confluentes primo inter ſe, denique in finem procurrentis tamen tranſeant, cum eoque in terminalem inferiorem inſerantur. Sic enim in pluribus aliis exemplis fibrarum ventriculi ſiniſtri, imprimis in ordine quarto, explorando rem ſe habere inueni. Dum in procurrentem longum hae fibrae tertii ordinis in ſuperiori ſuperficie incurrunt, ea directione feruntur, vt aliae ad illum oblique ſe applicare *c*), aliae, confluendo inter ſe, acuto communi fine in ipſum angulum inter procurrentem longum et breuem *d*) ſe inſerere *e*), videantur. In aliis cordibus ita etiam vltimas fibras ordinis tertii procedere vidi, vt ad procurrentem breuem a tergo ſe applicare vide-

a) Tab. I. 89. 89. 90. Tab. IV. 75. 77. 79.
b) Tab. IV. 75. 77. 78. 79. 81. 82.
c) Tab. IV. 77. 78.
d) Tab. IV. 74. 87.
e) Tab. IV. 81. 82.

derentur. Semper tamen ſe recipiunt ſub procurrentes, & confluendo inter ſe communi fine demum in procurrentem longum ſe inſerunt.

Confirmatio ordinis quarti fibrarum.

Fibrae ordinis quarti, ſeu *fibrae radiatae* ſuperiores, ortae a tertia parte crenae anteriori, ſeu regione radiata *a*), concurrentes inde radiatim verſus marginem *b*), inſertae in focum ſuperiorem, qui et apex ventriculi ſiniſtri eſt *c*), in vno atque in altero corde, ſicut in reliquis, quae vidi, reperiuntur *d*).

Eiusdem ordinis deſcriptio noua. Procurrens breuis.

Vti vero tertius ordo fibrarum ſuum procurrentem funiculum habet, quo a ſecundo fibrarum ordine diſtinguitur, quo terminatur ad marginem ventriculi, et in quem denique fibrae eius omnes inſeruntur; ſic ſuo quartus pariter ordo inſtructus eſt *funiculo procurrente*, qui hunc ordinem a tertio diſtinguit, ad marginem eundem terminat, et fibras huius ordinis omnes recipit *e*). Quamuis in primo corde hunc funiculum non perceperim, neque ad finem vsque pinxerim in icone; omnibus notis tamen in ea cognoſcitur, et ab aliis fibris diſtinguitur *f*). Breuior eſt procurrente ordinis tertii, cum propior apici a crena oriatur, et in eundem tamen apicem iuxta priorem inſeratur. Biceps plerumque, aut capite tamen inſtructus latiori, eſſe ſolet, ex quo, magis magisque attenuatus, in

a) Tab. I. 96. 97. 99. 102. D. Tab. IV. 85. 92. 98. E.
b) Tab. I. 95. 98. 100. 103. 104. Tab. IV. 87. 91. 93. 96.
c) Tab. I. E. Tab. IV. T.
d) Tab. I. 96. 97. — 104 — E. Tab. IV. 83. 85 — 98 — T.
e) Tab. IV. 83. 84. 85. 87. 88. 88. 101.
f) Tab. I. 94. 96. 95.

in caudam curuatam tandem desinit. Oritur duobus in hoc corde capitibus, posteriori altero *a*), altero anteriori *b*), fibris breuibus nectentibus *c*) inter se coniunctis, a parte crenae anteriori, siue radiata, proxime post regionem pontis. Id vero propius apici in aliis cordibus est, in aliis, velut in hocce, magis ab eo remotum; provt regio radiata maior aut minor est. Solet tamen haec regio ventralibus fibris ventriculi dextri *d*), et procurrens funiculus principiis suis angularium fibrarum insertioni *e*), respondere; vt funiculus procurrens breuis ab ea parte crenae oriatur, in quam vltimae fibrae latae se inserunt, reliquae fibrae ordinis quarti ab ea originem ducant, quam tenues ventriculi dextri fibrae sua insertione occupant. Sic in hoc corde *f*) et in priore *g*) se res habet. Hinc orta bina principia procurrentis oblique versus marginem et apicem ventriculi progrediuntur, et coniuncta in vnum funiculum confluunt *h*), qui, magis magisque tenuior teretiorque factus, curvatus ad marginem demum venit *i*) et ad procurrentem longum *k*), qui secundum longitudinem per totam hanc regionem marginem ventriculi percurrit, fibrasque omnes tertii et quarti ordinis ab inferiori superficie, fibrisque, quae eam occupant, secundi et primi ordinis, separat. Ei se longo procurrenti funiculo breuis adiungit, cum eoque vna per reliquam partem mar-

a) Tab. IV. 83.
b) Tab IV. 85.
c) Tab. IV. 86.
d) Tab. IV. 31. 41.
e) Tab. IV. 27. 28.
f) Tab. IV. 28. 83. 85.
g) Tab. I. 28. 94. 96.
h) Tab. IV. 87.
i) Tab IV. 88.
k) Tab. IV. 74.

marginis ad apicem vsque *a*) progreditur. Ibi extremitate finitur vnciformi *b*), ſimili omnino et aequali vnco illi, quem ſua extremitate fasciculus format terminalis ſuperior *c*); eoque vnco contra vncum fasciculi ea ratione poſitus eſt procurrens, vt terminalis a parte ſuperiori deorſum in procurrentis, procurrens ab inferiori ſurſum in terminalis, extremitatem vncum ſuum demittat, alterque in alterius ſe extremitatem inſerat, et duobus his vncis vterque circulum efficiat completum, exiguum, cuius centrum foueola eſt, minima quidem, verum diſtincta, manifeſta, rotunda *d*). Haec foueola in ipſo manifeſto apice ventriculi ſiniſtri ſita eſt. Dixeram in deſcriptione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri hoc punctum, in quod fibras radiatim contendere videbam, focum ſuperiorem; haud ſatis recte id tamen. In ſequentibus hanc ſtructuram accuratius deſcribam.

Reliquae ordinis quarti fibrae.

Reliquae fibrae ordinis quarti, *fibrae radiatae*, a reliqua anteriori parte crenae ad valleculam vsque *e*) oriuntur. Arcuatim inde et radiatim verſus marginem primo, et, qui eum occupat, funiculum procurrentem breuem, deinde verſus apicem ſimul quoque concurrunt *f*), omnesque, mediate vel immediate, demum in procurrentem breuem inferuntur; ſicut tertii ordinis fibrae in longum inſerebantur funiculum. Verum nec ſimili modo progrediuntur omnes, nec inferuntur in brevem. Aliae nimirum directe magis tranſeunt in eum *g*), aliae iuxta

---

a) Tab. IV. 101. 105.
b) Tab. IV. 101.
c) Tab. IV. 100.
d) Tab. IV. 102.
e) Tab. IV. 89. 92. 98.
f) Tab. IV. 90. 91. 95. 96.
g) Tab. IV. 89. 90. 91.

iuxta eundem, curuatae, procurrunt aliquantum, et propius extremitati demum inferuntur *a*). Atque iftae quidem tum alias in fe rurfum recipiunt *b*). In hoc quidem corde primae fibrae *c*) immediate in procurrentem tranfeunt. Tum vero fibra fequitur longa tenuis *d*), iuxta procurrentem curuata, in eumque demum inferta. In hanc fibram aliae quaedam fequentium fibrarum *e*) inferuntur, eiusque ope demum ad procurrentem perueniunt. Alia deinde fimilis longa tenuis fibra, a crena orta, ad procurrentem curuata, fequitur, propius extremitati in eum inferta *f*), in quam quaedam fequentium fibrarum fe denuo immittunt, eiusque ope in procurrentem inferuntur *g*). Denique tertia et vltima fibra longa ex media fere regione radiata crenae oritur *h*), pariter curuata, et in procurrentem inferta *i*). In eam reliquae radiatae fibrae omnes ad valleculam vsque *k*) transuerfim fere incurrunt, per eamque in procurrentem inferuntur. Elegantiorem fere fibrarum radiatarum ftructuram in aliis cordibus vidi et magis regularem. Procurrens breuis, folito modo diftinctus, ad apicem ventriculi productus, vnco fuo ad vncum terminalis fuperioris applicatus eft, vt bini funiculi his vncis fuis circulum formarent integrum, et foueolam includerent, folito modo rotundam. Ceterae fibrae omnes ordinis quarti pennatim ad illum funiculum procurrentem tranfeunt ea ratione, vt primae defcendendo oblique, mediae fenfim transverfim

a) Tab. IV. 98.
b) Tab. IV. 96. 97. 98.
c) Tab. IV. 89. 90.
d) Tab. IV. 93. 93.
e) Tab. IV. 92.
f) Tab. IV. 94.
g) Tab. IV. 94.
h) Tab. IV. 95.
i) Tab. IV. 96.
k) Tab. IV. 97. 98.

verſim progrediendo, vltimae demum adſcendendo, radiatam quodammodo figuram efficerent, excepta vna ſola fibra, caeteris craſſiori, mediam fere partem inter eas occupante, quae, vbi ad procurrentem faſciculum venit, iuxta eum curuata continuat fere ad extremitatem vsque, in quam ſe inſerit. Quae priores hae fibrae a crena oriuntur, in funiculum pennatim et arcuatim tranſeunt ipſum; quae poſt eam, propiores apici, oriuntur, in eam fibram tranſeunt ſimili modo, cum eaque in extremitatem funiculi inſeruntur. Caeterum recipiunt ſe hae fibrae ſub procurrentem breuem, ſimili prorſus modo, vt fibras ſe recipere monui tertii ordinis ſub procurrentem longum. Tum pariter vero curuatae illae verſus apicem, tectae ſuo procurrente, aliquantum continuant, et confluendo inter ſe denique tamen in eum procurrentem inſeruntur.

Figura radiata ſuperior eiusque focus.

Sic illa *figura radiata ſuperior* formatur, cuius nonniſi imperfectam imaginem in prima deſcriptione exhibui. Ea ergo radiata vocari poteſt, quatenus curuatae fibrae ad procurrentem concurrunt, ſub eoque aliquantum continuant et angulis demum acutis in eum inſeruntur. Vti vero minime in vnum punctum ſingulae conueniunt, ſed in procurrentem, qui lineam curuam exprimit, inſeruntur, *pennatae* quoque aut mediae inter pennatas et radiatas, vocari merentur. Tum porro vero in ſingulis, quae vidi, cordibus vel vna, vel duae, vel tres fibrae dantur inter radiatas, quae, ceteris longiores, ad aliquod ſpatium iuxta procurrentem funiculum progrediuntur, antequam in eum ſe inſerant *a*). Hae vti proxime ſequentes fibras prohibent, quo minus ad procurrentem immediate pervenire poſſint, has fibras recipiunt ipſae *b*), vt tanquam rami ergo

a) Tab. IV. 93. 93 — 94 — 95 96.
b) Tab. IV. 97. 98.

ergo illae longiores fibrae funiculi procurrentis conſiderari poſſint. *Pennata* ergo et *ramificata* ſimul figura ea radiata eſt, quam fibrae ſuo ductu in ſuperiori ſuperficie circa apicem exprimunt; vt funiculus procurrens ipſe tanquam truncus, ſeu penna primaria, fibrae longiores, quae alias breuiores fibras recipiunt, vt rami, ſeu ſecundariae pennae, conſiderari poſſint. Tres nempe eiusmodi pennae ſecundariae in hoc corde obſervantur *a*). Nonniſi vnam in aliis, mediam regionis radiatae ſedem occupantem, reperi. Si *focum* ergo dixeris concurſum fibrarum radiatarum, patet eum eſſe ad marginem dextrum concauum procurrentis funiculi breuis *b*), et ad fibras longiores, funiculi ramos; et *focum* proinde *lineis exprimi curuatis* concurrentibus; vt *focus* ergo *linearis* ſit et *ramificatus*. Alia ſcilicet figura radiata, aliusue fibrarum concurſus et alius focus, in ſuperiori ſuperficie ventriculi ſiniſtri non datur.

Figura radiata inferior et focus eius.

Similique modo cum *figura radiata inferiori* comparatum eſt. Haec finibus formatur fibrarum ordinis ſecundi, quae ex maiori ambitus parte ad marginem ſiniſtrum *c*) in anguſtius ſpatium ad funiculum terminalem inferiorem *d*), proinde radiatim, concurrunt, et extremitatibus porro fibrarum ordinis tertii *e*), ad procurrentem funiculum longum *f*) collectis, eiusque ope in extremitatem funiculi eiusdem terminalis inferioris ſuperiorem *g*), iuxta vltimas praecedentium fibrarum ſe-

a) Tab. IV. 93 93 — 94 — 95. 96.
b) Tab. IV. 87. 88. 88.
c) Tab. VI. 13. 22.
d) Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75.
e) Tab. VI. 24. 25.
f) Tab. VI. 24. 76.
g) Tab. VI. 76.

cundi ordinis, *a*) inſertis. Pariter ergo hae fibrae radiatae inferiores, ac ſuperiores, pennatae ſunt, et figura, quam efficiunt, radiata pennata, et focus ad marginem ſiniſtrum funiculi terminalis inferioris lineam exprimit, parum curuatam. Neque deſunt inter has fibras radiatas aliae longiores, ad terminalem funiculum peruenientes, in eamque inſertae *b*), aliaeque breuiores, in illas longiores inſertae *c*), nec niſi harum longarum ope ad funiculum terminalem peruenientes *d*). Sic totus ordo tertius fibrarum ad procurrentem longum concurrit eiusque ope ad terminalem peruenit *e*). Sic aliae quoque ex ſecundo ordine *f*) in ſuo itinere confluunt *g*). Et *focus* ergo *inferior* pariter atque ſuperior *ramificatus* eſt, vt funiculus terminalis inferior tanquam truncus, funiculus procurrens longus imprimis vt ramus illius conſiderari poſſit, in quem, ſicuti in truncum ipſum ſecundus ordo fibrarum, tertius fibrarum ordo inſeratur, cum eoque tandem ad funiculum terminalem ipſum perueniat.

Centrum focorum commune.

Iam vero funiculus terminalis inferior minime truncus eſt fibrarum, quae in eum inſeruntur, et qui non porro in alium inſereretur. In ſuperiorem iſte vna cum medio ſe inſerit *h*) proxime ad extremitatem illius, qua vncum producit, vnco procurrentis minoris *i*) applicatum. Is ergo ſuperior faſciculus

---

a) Tab. VI. 75.
b) Tab. VI. 72. 76.
c) Tab. VI. 73. 74. 75.
d) Tab. VI 72.
e) Tab. VI. 76. Tab. IV. 105.
f) Tab. VI. 54. 59.
g) Tab. VI. 62. 65. 60.
h) Tab. IV. 104.
i) Tab. IV. 100.

culus terminalis truncus eſt vltimus, ad quem omnes tandem fibrae, quae in inferiorem inſeruntur, fibrae ſecundi et tertii ordinis, recurrunt. Primarii huius rami ſunt terminalis medius et inferior *a*). Et inferior tum porro fibras recipit dictas omnes ſecundi et tertii ordinis. Quodſi nunc porro ad finem faſciculi terminalis ſuperioris, ſicuti et ad procurrentis funiculi breuis finem, qui quippe truncus eſt vltimus fibrarum ordinis quarti, animum attendimus, hos ambos truncos in ſe mutuo patuit inſertos eſſe extremitatibus ſuis vnciformibus *b*). Vt fibrae ergo omnes ordinis quarti in extremitatem vltimam fibrarum ſecundi et tertii ordinis et fibrae viciſſim ſecundi et tertii ordinis omnes in vltimam fibrarum ordinis quarti extremitatem ſe inſerant. Circulus ergo ille, quem vncis ſuis efficiunt funiculi, terminalis ſuperior et procurrens breuis, et foveola, quam circulus includit *c*), commune punctum inſertionis ſunt omnium fibrarum ſecundi, tertii et quarti ordinis, et *centrum commune focorum*, in quos illae fibrae colliguntur. Solus primus ordo ergo fibrarum ventriculi ſiniſtri totam ſtriam ſua inſertione occupat, reliqui tres ordines in focos primo quidem ſuos, ſecundus et tertius in inferiorem, quartus in ſuperiorem, deinde his focis vero porro in vnum punctum, centrum focorum commune, tandem tranſeunt.

Centri communis ſedes.

Sedes centri communis in ipſo ventriculi margine eſt, et in media craſſitiei eius parte. Vt repraeſentare illud poſſem in icone, parietem ventriculi ſuperiorem, cum eoque vna marginem in ſede, propinqua apici, verſus crenam et baſin oblique

a) Tab. IV. 103. 104.
b) Tab. IV. 102. 100. 101.
c) Tab. IV. 100. 101. T.

que retrorſum paulisper attraxi, cum ſuperiorem pingerem ſuperficiem; verſus ſtriam contra oblique et baſin inferiorem cum margine ſuperficiem coegi, cum inferiorem delinearem. Sic in vtraque ſuperficie, et in quauis, quomodo cum ceteris fibris eius ſuperficiei cohaereat, repraeſentatum eſt centrum commune focorum *a*). Vera ſedes interim in ipſo margine eſt, et in ea quidem eius parte, vbi bini diſtincti ventriculi margines, ſiniſter *b*) et anterior *c*), concurrunt, in qua ſede apex quoque ventriculi tum ductu fibrarum, tum marginum concurſu, formatur.

Sedes focorum.

Focus ſuperior cum ea procurrentis faſciculi minoris parte, ad quam fibrae concurrunt, focumque efficiunt, in margine ſiniſtro, vltimaque eius parte, apici propinqua, ea quidem ratione, ſitus eſt, vt procurrens ad marginem iam, focus ipſe, ſeu concurſus fibrarum, ad ſuperficiem potius ſuperiorem ſit referendus; procurrens tamen in margine proximus ſuperficiei ſuperiori, focus in ſuperficie propinquus margini, ſit. Focus inferior cum funiculo terminali inferiori, in quem fibrae concurrunt, in margine anteriori, quem totum focus quoad longitudinem occupat, collocatus exiſtit, ea ratione, vt faſciculus terminalis ad marginem pariter, extremitates fibrarum ad ſuperficiem pertineant inferiorem, faſciculus tamen proximus ſit inferiori ſuperficiei. Focus ergo ſuperior in margine ſiniſtro, propior ſuperficiei ſuperiori; inferior in anteriori margine, inferiori propior ſuperficiei; et centrum commune in vtriusque marginis concurſu, ſeu apice ventriculi, eiusque in media reſpectu craſſitiei parte exiſtit.

Qua-

a) Tab. IV. 102. Tab. VI. 80.
b) Tab. IV Q. T. Tab. VI. 13. 80.
c) Tab. IV. T. E. Tab. VI. 80. 4.

Quatuor fibrarum ventriculi ſiniſtri externarum ordines dantur et tres praeterea faſciculi terminales.

Sic quatuor ergo ordines dantur fibrarum in ſtrato externo ventriculi ſiniſtri. Fibrae nimirum ordinis primi, quae, ortae a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, inſeruntur in ſtriam. Fibrae ordinis ſecundi, quae, ortae a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro, in faſciculum inſeruntur terminalem inferiorem. Fibrae ordinis tertii, quae, ortae a media parte crenae, inſeruntur in faſciculum eundem, formando cum ordine fibrarum ſecundo focum inferiorem. Fibrae ordinis quarti, quae, a radiata parte crenae ortae, in vncum communi extremitate inſeruntur faſciculi terminalis ſuperioris, ſuperiorem formando focum. Vt ordines autem illi determinati non modo ſinguli ortu ſuarum fibrarum et ductu et fine, ſed ita completi quoque ſunt in ſedibus ſuis, vt nulla alia fibra, ab alia parte orta, in aliam inſerta, iis accenſeri poſſit; aut quintum ordinem faſciculi efficiunt terminales, omnibus notis diſſimilem prioribus, aut ad nullum tamen priorum ordinum referri faſciculi illi poſſunt. Vt quatuor ergo fibrarum ordinibus ſtratum externum ventriculi ſiniſtri et tribus praeterea faſciculis terminalibus conſtet.

EXPICATIO

Tabulae VI.

Eiusdem cordis (Tab. IV et V.) fibrae externae in ſuperficie inferiori. Ventriculi ſiniſtri apex, paulisper in ſuperficiem repraeſentatam retractus, vt centrum commune focorum, extremitatesque funiculorum procurrentium cum aliqua parte fibrarum, in illos inſertarum (24. 76. 29.), appareant.

A. Ventriculus ſiniſter.
B. Dexter.

C. Stria, fibris facta ſuperficialibus, ſuperſtratis, paſſim inter ſe confluentibus, ſicut ex ſingularum demonſtratione patebit. (Tab. III. D. C.)

D. E. F. G. Sinus ſiniſter. Eius paries poſterior.

D. Margo ſiniſter ſeu latus ſiniſtrum. (Tab. IV. *b.* auricula in ſitum naturalem reflexa.).

E. Regio inſertionis venae cauae inferioris orificio ſuo ſiniſtro, nunc obturato.

F. Baſis parietis poſterioris, qua filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro inſidet.

G. Margo, ſeu ſuperficies puluinata, ſuperior.

H. Vena pulmonalis ſiniſtra anterior.

I. Vena pulmonalis ſiniſtra poſterior.

K. Vena pulmonalis dextra anterior.

L. Dextra poſterior.

M. Sinus dexter. Eius latus dextrum.

N. Parietis poſterioris baſis qua filo inſidet ſinus cartilagineo poſteriori dextro.

O. Vena caua inferior.

P. Vena caua ſuperior.

Q. Q. Arteria pulmonalis ſiniſtra.

R. Arteria pulmonalis dextra.

S. Pars arcus aortae, biſurcationi arteriae pulmonalis interpoſita.

T. Arcus aortae.

V. Arteria innominata.

W. Arteria ſubclauia dextra.

X. Carotis dextra.

Y. Carotis ſiniſtra.

Z. Arteria ſubclauia ſiniſtra.

a. Spelunca poſterior, ſeu apertura poſterior canalis inter ſinum dextrum et ſiniſtrum. (Tab. III. 5.).

b. Truncus filorum cartilagineorum poſteriorum. (Tab. III. 4.)

c. Filum cartilagineum poſterius ſiniſtrum. (Tab. III. *y.*).

d. Filum cartilagineum poſterius dextrum. (Tab. III. 2.).

e. Fibra ſtriae a parte dexteriori prima, prorſus in hoc corde a caeteris ſeparata, nec obſcure naturam indicans harum fibrarum. Oritur a filo cartilagineo poſteriori dextro. Superſtrata proximis fibris ventriculi dextri (82. 83. *b.* 89.), vt facile ab iis ſolui poſſit, nec niſi leviter adhaereat, in duos finditur ramos (*f. g.*), qui in ipſas continuant dextri ventriculi fibras, vicinis intermixtas.

f. Ramus huius fibrae alter, qui in fibras (90) continuat.

g. Alter ramus in fibras ad (B.) continuans.

h. Pars fibrarum ventriculi dextri (89.) qua ſub fibra (*i. k.*) ex profundioribus fibris ſtriae (*n. n*) illae (89. *h.*) oriuntur.

i. k. Fibra ſtriae in hoc corde ſecunda, longior, pluribus transuerſis ventriculi dextri fibris ſuperſtrata, denique et ipſa in eiusmodi transuerſas dextri reſoluta.

i. Duae, quibus a filo oritur, eius radices.

k. Fibra ipſa ex binis nata.

l. Portio huius fibrae, reſoluta in transuerſas ventriculi dextri (92.) Reliqua fibrae portio in fibras (93.) reſoluta.

n. n. Fibra ſtriae profundior, ex qua fibrae transuerſae (*h.* 89.) et porro illae (90) produci videntur.

o. Alia fibra ſtriae ſublimis, facile ſolubilis.

p. Vbi haec fibra cum illa (*k*) confluit.

q. Inſula, quam confluendo fibrae ſtriae efficiunt, vbi profundiores apparent fibrae.

r. s. Duae aliae fibrae ſiniſteriores, a filo ortae cartilagineo poſteriori ſiniſtro.

t. Ramulus anaſtomoticus, quo fibrae (*r. s.*) cum fibra (*o*) coniunguntur.

v. Alia inſula.

w. Continuatio fibrarum (*r. s.*) per ſtriam.

x. Earundem continuatio in fibras ventriculi dextri.

y. Vltima, quae in hoc corde ad ſtriam referri poteſt fibra, a filo cartilagineo ſiniſtro orta.

z. Eius per ſtriam continuatio.

1. Eiusdem porro in fibras ventriculi dextri continuatio.

2. 3. Reliquae ſiniſterioris portionis ſtriae, ex fibris ventriculi ſiniſtri continuatis ortae, continuatio in fibras ventriculi dextri.

4. 5. Faſciculus terminalis inferior (Tab. IV. 104.)

4. Eius ortus a fine ſtriae, fibris carneis quidem, at quae fere ſubtendineſcentes videntur, innatae firmiter in hac ſede carni cordis et profunde, vt ad internam ventriculi ſuperficiem vsque implantatae fibrae eſſe videantur.

5. Eius finis, quo fibrae in medium faſciculum (6. 7.) inſeruntur.

6. 7. Faſciculus terminalis medius (Tab. IV. 103.).

6. Eius ortus ſimiliter fibris profundis ſub prioribus (4.) et iuxta faſciculum (98.), quocum vna, fibris tamen vnius faſci-

faſciculi ab alterius fibris ſeparatis, emergere videtur. Nimirum tenuis in his ſedibus paries ventriculi eſt, et ab interna huius ſuperficie funiculi ambo omnino oriuntur, columnas tamen, ex quibus continuarentur, non reperi.

7. Eius inſertio in faſciculum terminalem ſuperiorem.

8. Faſciculus terminalis ſuperior, (Tab. IV. 99.) Ortus a latere faſciculi (98.), inſertus vnco ſuo (79.) in procurrentem breuem (78.) (Tab. IV. 100. 101.). In hunc faſciculum terminalem ſuperiorem ergo medius et inferior inſeruntur; in inferiorem autem porro fibrae omnes ordinis ſecundi et tertii (53. 55. 68. 69. 72. 75.).

9. 10. 11. 12. F. C. Fibrae ordinis primi, a filo poſteriori (F.) ortae, in ſtriam (C. 12.) inſertae.

13. 14. 15. 16. 18. 19. 21. 22. 53. 55. 68. 69. 72. 75. Fibrae ordinis ſecundi ſeu fibrae funium.

24. 25. 76. Fines fibrarum ordinis tertii.

24. 76. Procurrens longus (Tab. IV. 73. 74. 74).

25. Vltimae fibrae ordinis tertii in eum inſertae (Tab. IV. 82.). Hae fibrae in ſitu naturali in hac ſuperficie prorſus non apparent. Procurrens longus ipſe, qua parte apparet, ipſum marginem in ſitu naturali occupat, in eoque ſuperficiem inferiorem intuenti apparet. Eadem vero parte ſuperiorem intuenti minime apparet.

27. 28. 29. 78. Portio fibrarum ordinis quarti, (Tab. IV. 94. 96.) quae pariter in hac ſuperficie in ſitu fibrarum naturali non apparent.

Sic fibrae ordinis primi (9. 10. 11. 12. F. C.) in ſtriam; fibrae ordinis ſecundi (13. etc. 22. et 53. etc.

etc. ad 75.) et tertii ordinis fibrae (24. 25. 76.) in faſciculum terminalem inferiorem, focum formando inferiorem; quarti demum ordinis fibrae in procurrentem minorem, ſuperiorem focum formando, inſeruntur. Vt faſciculi ergo terminales ſuperſint in ſtrato externo ventriculi ſiniſtri, qui ad nullum horum ordinum referri poſſunt, ſed ſingulares huius ventriculi faſciculos efficiunt.

13. 14. Funiculi, ſeu primae fibrae ordinis ſecundi (Tab. IV. 46. 47. 48. 49. 50.)

15. 16. Fibrae ex fune magno (Tab. IV. 51. 52.), reſoluto, continuatae (Tab. IV. 54. 55. 56.).

17. Interſtitium notabile, fibrillis repletum.

18. 19. Continuatio fibrarum, in quas funis ramificatus (Tab. IV. 60. 61. 62.) fere reſoluitur (Tab. IV. 61. 62.)

20. Interſtitium inter has fibras ſimile longum, fiſſuram referens, fibrillis repletum.

21. 22. Continuatio fibrarum funis applicati (Tab. IV. 65. 70. 71.).

23. Simile interſtitium fibrillis repletum, ſicuti et illud (65.)

24. 25. Continuatio fibrarum tertii ordinis (Tab. IV. 74. 78.), quae in ſitu naturali in hac ſuperficie non apparent, ſed in margine collocatae exiſtunt.

24. Procurrens funiculus longus (Tab. IV. 74. 74.).

25. Vltimae fibrae ad eum applicatae. (Tab. IV. 78.).

26. Interſtitium ſimile prioribus.

27. 28. 29. Continuatio fibrarum ordinis quarti (Tab. IV. 88. 93. 96. 97. 98.) quae pariter in ſitu naturali in hac ſuperficie non apparent, collocatae in margine.

27. Funiculus procurrens breuis (Tab. IV. 88.).

28. Fibrae ad procurrentem ipſum applicatae (Tab. IV. 90. 91. 92. 93. 96.).

29. Fibrae, ad vltimam priorum fibrarum, quo focus pennatus et ramificatus efficitur, applicatae. (Tab. IV. 97. 98.).

30. Quae tanquam prima fibra ventriculi ſiniſtri in hoc corde conſiderari poteſt, proxima praecedente (y.) ad ſtriam relata.

31. Interſtitium fibrillis repletum.

32. Secunda fibra, in ſtriam inſerta, ad eam efficiendam concurrens.

33. 34. 35. Tres fibrae ſequentes, a filo ſucceſſiue ortae, confluentes (35.), in ſtriam inſertae.

36. Fibra, ex prioribus nata, in ſtriam inſerta.

37. Fibrae duae, paſſim inter ſe confluentes inordinata coalitione.

38. 39. Fibra ſequens, ſolito ductu a filo ad ſtriam procedens. Videtur ſub priores fibras (36.) tranſire, vti ſequentes. Neque continuat in ſtriam.

Vt prima pars fibrarum ergo ordinis primi (30. 34. 35. 36.) in ſtriam continuet, eamque efficiat; ſecunda (38. 40. 41.) ad ſtriam ſe applicet, vel ſe recipiat ſub eam; tertia (42. 43. 44. 45.) praeter finitam ſtriam in hoc corde tranſeat in dextrum ventriculum.

40. 41. Vltima ad ſtriam applicata fibra ordinis primi.

42. 43. 44. Fibrae huius ordinis praeter ſtriam tranſeuntes.

45.

45. Eaedem, vbi in fibras ventriculi dextri continuant.

46. Quae prima et vnica huius ordinis in funiculum terminalem inferiorem, in eius ſummam extremitatem quidem, in hoc corde inſeritur.

47. 48. Fibra prima ad priorem, quae in apicem funiculi terminalis inſeritur, applicata.

49. 50. Secunda ad eandem applicata, et vltima fibrarum ordinis primi.

Dantur ergo in hoc ordine 1.) in ſtriam continuatae, 2.) ad ſtriam applicatae, 3.) praeter ſtriam tranſeuntes in ventriculum dextrum, 4.) ad ſe mutuo applicatae (48. 50.), quae vltimae ordinis primi ſunt. Ceterae ordinum ſecundi et tertii in faſciculum terminalem inferiorem inſeruntur.

51. 52. Prima fibra ordinis ſecundi, ab aliis in principio tecta.

53. Proximae fibrae, ab aliis partim, partim ab interſtitio inter fila cartilaginea ſiniſtra, ortae.

54. Prima ex funibus tenuioribus fibra manifeſta ſublimior (Tab. IV. 46. *a.*).

55. Eiusdem continuatio et inſertio in fasciculum terminalem inferiorem.

56. Secunda diſtincta fibra (Tab. IV. Q.).

56. 57. Quatuor fibrae (Tab. IV. Q. 46. 47. 48.).

58. Confluxus harum fibrarum cum illa (56.).

59. Vltima funium tenuium fibra continuata ex illis (Tab. IV. 49. 50.).

60. Vbi et haec craſſa fibra (59.) cum priori (58.) confluit,

fluit, eaque ratione fibrae funiculorum omnes in vnam denique (55.) continuatae, ceterae in angulum acutum inter illam et fibram (15.) concurrunt, et ſic concentrantur.

60. 65. Interſtitium ſeu angulus acutus, in quo concentratae fibrae concurrunt.

61. Simile fere interſtitium acutum, fibrillis repletum, in quo fibrae (Tab. IV. 49.) concentratae concurrunt, vt (Tab. IV. 50.) in illam (59.) continuet, illa (Tab. IV. 49.) concentratione euaneſcat; ſicuti ad ſedem (65.) omnes demum funiculorum fibrae concentratae deſinunt.

62. 63. 64. Parua interſtitia oblonga fibrillis repleta.

65. Interſtitium ſuperius dictum acutum, cuius ſimilia minora (17. 20. 23. 26.) occurrunt, quibus fibrae, in quas funes reſoluti, et fibrae ordinis tertii, in faſcias fere diviſae, principio latiores, auguſtiores fine, diſtinguuntur.

66. 67. Quatuor inſignes fibrae, ex magno fune (Tab. IV. 54. 55. 56.) continuatae.

68. 69. Earum ſingularum inſertio in faſciculum terminalem inferiorem.

70. 71. Quatuor fibrae ex fune ramificato productae (Tab. IV. 61. 62.).

72. Earum concentratarum inſertio in faſciculum terminalem inferiorem.

73. 74. Quatuor fibrae inſignes ex fune applicato productae (Tab. IV. 70. 71.)

74. Inſertio priorum in praecedentem fibram.

75. Caeterarum fibrarum in funiculum inſertio.

76. 24. Funiculus procurrens longus (Tab. IV. 74. 74.)

76. Eius inſertio ad faſciculum terminalem inferiorem (Tab. IV. 105.).

77. 25. Vltimae fibrae ordinis tertii, earum quidem extremitates, in procurrentem funiculum longum inſertae.
78. 27. Procurrens breuis (Tab. IV. 88. 88.).
78. Eius vncus, eiusque cum vnco fasciculi terminalis ſuperioris (79.) coniunctio (Tab. IV. 101.).
79. Vncus funiculi terminalis ſuperioris (Tab. IV. 100.).
80. Centrum commune focorum (Tab. IV. 102.).
(53. 68. 69. 72. 75. 76. 4. 5. 6. 7. 79. Focus inferior pennatus.)
82. Primae fibrae angulares, ſub ſtriae fibris (*i. n.*) ortae.
83. Earum continuatio.
84. Fibrae angulares quaſi mediae, ex media parte fili cartilaginei poſterioris dextri ortae.
85. Quae ex fine fili oriuntur.
87. Ex interſtitio ortae inter fila cartilaginea dextra.
88. Earundem in ſuperiorem ſuperficiem flexio.
89. Prima ventralium fibrarum portio, ſub fibris (*i*) orta.
90. Altera portio ventralium.
91. 91. Alia portio, partim ex fibra ſtriae (*g*) partim a latere ſtriae (91.) orta.
92. 92. Alia portio a latere ſtriae.
93. 93. Alia portio ex ſtria continuata.
94. 95. Aliae portiones ex ſtria continuatae.
96. Alia portio partim a ſtria, partim ex fibris ventriculi ſiniſtri continuata (44. 45.).
97. Alia fibrarum portio ab apice fasciculi terminalis inferioris orta.
98. Fasciculus in hoc corde terminalis ventriculi dextri.
99. Fibrae ventrales vltimae ex terminali fasciculo ortae.
100. Apex ventriculi dextri ſeparatus ab apice ſiniſtri.

DE

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Dissertatio VII.

DE STRATIS FIBRARVM IN VNIVERSVM.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 25 Ianuar. 1787.

Strata fibrarum secundum Lowerum.

Fibras ventriculorum cordis in varia, dum illos inuoluunt, strata esse distinctas, separabilia a se inuicem, et directione fibrarum diuersa, a primis iam, qui in structuram earum inquisiuerunt, Auctoribus cognitum fuit. Tria diuersa fibrarum strata *Lowerus* ventriculo vtrique attribuit: *externum*, quod solis quidem animalibus proprium est, in corde humano non datur, fibris constructum rectis, ab apice recta ad basin ductis *a*); deinde, quod *medium* vocat, quodque ipsum in humano corpore verum vtriusque ventriculi externum est, fibris ab apice oblique dextrorsum ad basin transeuntibus *b*); denique quod,

a) *Lower* de Corde. Edit. Lond. pag. 24. Tab. II. fig. 2. Edit. Lugd. Tab. III. fig. 2

b) Low. l. c. Edit. Lond. pag. 25. Tab. II. fig. 3. Edit. Lugd. pag. 30. Tab. III. fig. 3.

interius Lowero dictum, verum ſecundum, ſeu medium, in dextro ventriculo, in ſiniſtro tertium eſt, fibris factum, a dextro cordis latere ad ſiniſtrum oblique adſcendentibus, et ventriculum vtrumque complexis *a*); vt, ſi internum his addas, quod carneae columnae intus, maximam partem parieti interno adhaerentes, efficiunt, quatuor omnino ſecundum anatomen *Loweri* numeranda ſint ſtrata fibrarum, ventriculo vtrique communia.

Secundum Senacum.

Rectius omnino *Senacus* tria in dextro ventriculo, externum, medium, internumque, ſi ſcilicet columnae pro interno habentur, in ſiniſtro longe plura diſtinxit, quorum numerum non inuenio eſſe indicatum. Eaque directione ferri horum ſtratorum fibras in ventriculo dextro, accuratior ſcrutator docuit, vt, quemadmodum externae oblique a baſi ſiniſtrorſum ad apicem deſcenderent, mediae ab apice ſiniſtrorſum ad baſin adſcendant potius, decuſſando externas *b*); internae variis modis progrediendo reticularem et indeterminatam ſtructuram efficerent *c*). Siniſtri ventriculi fibras in variis ſuis ſtratis ita ſucceſſiue ex oblique deſcendentibus, qua directione ſcilicet externae feruntur *d*), ad transuerſalem appropinquare ductum, vt in tertio vel quarto ſtrato omnino iam transuerſim fibrae procedant *e*); deinde et transſcendere in ſtratis ſequentibus ductum

---

a) Low. Edit. Lond, pag. 25. 26. Tab. II. fig. 4. Lugd. pag. 31. Tab. III. fig. 4.

b) Senac. Traité du coeur. Tom. I. pag. 200. Tab. VII. Stratum externum fig. 1. et 2. medium fig. 3. et 4.

c) Senac. l. c. pag. 198. Tab. 14.

d) Senac. Tab. VII. fig. 1. h. h. Tab. VIII. fig. 2.

e) Senac. Tab. VIII. fig. 3.

ductum transuersum, vt magis magisque ab apice ad basin succeſſiue adſcendant *a*).

In quibus ſola directio fibrarum in vniuerſum notata.

Verum haec omnia quoque fere ſunt, quae de fibris ventriculorum mediis, tum et de caeteris, externis internisque, tradita exſtant; neque vlterius in earum naturam ars anatomicorum penetrare potuit. Inanes omnino proprietatibus quibusvis fibrarum icones *Senaci* pariter ac *Loweri* apparent, quibus mediae non minus, quam quibus externae repraeſentantur; ſiquidem praeter lineas in iis ſimplices, parallelas, ſibi mutuo ſimillimas, quod nempe et ipſum iam falſum eſt, nihil aliud vides. Ortus fibrarum peculiaris nullus, inſertio determinata nulla, nec vspiam ſingularis ductus, aut progreſſus, aut quicquid fibram, vel portionem fibrarum, quamcunque a quacunque alia, aut fibra, aut portione fibrarum, diſcerneret, expreſſum eſt in iis iconibus; cum tamen in tot diuerſas portiones diuiſae hae fibrae faſcias diuerſas, aut faſciculos, quaſi muſculos ſingulares, figura, ortu, progreſſu, inſertione, natura et vſu, diuerſos, efficiant. Nimirum, ſi verum dicendum eſt, fibras in ſedibus iis, quas icones repraeſentant, in ſuperficiebus iis ventriculorum, dari, id cognitum quidem erat, et extra omnem dubitationis aleam poſitum, et qua directione in vniuerſum hae fibrae ferrentur. De caetero nil prorſus obſeruatum. Non poterat ergo, niſi manifeſto fingeret, aut varios propriosque ductus pictor fibris attribuere variis, aut determinatas inſertiones et ortus, aliasue proprietates quascunque, nec quidquam, verbo, aliud facere, quam ſimplices ducere lineas parallelas, quibus has ſedes et ſuperficies ventriculorum repleret. Neque mirum hoc valde eſt, cum admodum difficile omnino ſit ob-

a) Senac. Tab. VIII. fig. 4. 5. pag. 194. 195. 196.

ſeruare et diſtinguere has fibras, quemadmodum in prima diſſertatione fuſius expoſui.

Et quae nec vnquam tota ab his Auctoribus viſa eſſe videntur.

Haud plura etiam in deſcriptionibus *Senaci*, quam in iconibus eius, de natura harum fibrarum continentur. Id ſolum et verum eſt, et ad rem pertinet, quod de *directione* fibrarum in vniuerſum verboſior Auctor profert; reliqua, vbique eadem, repetita, parum ad rem faciunt. Eademque propemodum pauciſſimis ſuis, quae et retuli fere, verbis breuiſſimus indicat *Lowerus*. Imo ſi amplius etiam meam de his Auctoribus ſententiam ſcire volueris, non poſſum me cohibere, quin credam, neque *Senacum*, neque *Lowerum*, nec quemquam caeterorum Auctorum, qui de fibris cordis ſcripſerunt, vnquam varia illa, de quibus differunt, ſtrata vidiſſe tota, quovsque ventriculos ambiunt, quamuis non deſcribant modo haec ſtrata tota, ſed iconibus quoque, falſis ſcilicet, repraeſentent. Solum ex mediis ſiniſtri ventriculi ſecundum ſtratum integrum eſt, totumque a baſi ad apicem, a crena ad ſtriam, ventriculum involuit; neque id quidem, ſi ſcrupuloſior fueris, pro integro plane haberi poteſt. Tertium, quartum, et quintum, verſus apicem et ſtriam verſus, deficiunt. Minus quidem tertium, at maxime quartum, quo vix tertia pars ſuperficiei ventriculi prope baſin tegitur, reliqua maxima caret. Vnicum, quod datur, dextri ventriculi medium ſtratum quartam fere ad apicem partem ſuperficiei ventriculi vacuam fibris relinquit. Haec ſingula ſtrata integra et completa, a baſi ad apicem, a crena ad ſtriam, vsque fibris ſuis tegentia ventriculos, et deſcribunt pinguntque *Senacus* pariter et *Lowerus*. Neque difficultas obſeruandi in culpam hic adduci poteſt, qua falſi fibras ſe videre credidiſſent ſtratorum in ſedibus iis, vbi nihil prorſus exiſtit praeter

ter columnas ventriculorum et internam reticularem ſtructuram, quas coecus etiam indagator a ſtratis fibrarum facile diſcerneret. Adeo etiam in medio ſtrato ventriculi dextri, in ſuperficie quidem eius inferiori *a*), ſingularis fibrarum, deficientium paſſim, et adeo manifeſta diſtinctaque ſtructura eſt, vt, vel nunquam viſam eam eſſe, vel ita viſam, vt vere eſt, neceſſe ſit. Hanc pariter *Senacus* ſimilem prorſus caeteris ſtratorum fibris et pinxit et deſcripſit, fibris nimirum conſtantem parallelis aequalibus ſimilibusque tum inter ſe, tum etiam cum caeteris omnibus quorumuis ſtratorum fibris *b*). Veriſimile ergo omnino eſſe videtur, nonniſi paruas anguſtasque particulas tantum *Senacum* et *Lowerum*, dum diuerſorum ſtratorum fabricam et naturam indagare conati ſunt, detexiſſe de variis ſtratis illis, in quibus cum viderint, qua directione in vniuerſum fibrae progrederentur, coniecturam fecerunt, etiam in caeteris eorum ſtratorum ſedibus omnibus, perque vniuerſam ventriculi ſuperficiem, ſimilem omnino et directionem fore fibrarum et reliquam omnem eius ſtructuram. Hanc tum ſic creditam fabricam, quae nihil caeterum ſinguiare ſcilicet haberet, quaſi anatomia compertam, et tanquam ſi oculis eam vidiſſent, et deſcriptionibus ſuis inſeruêre et pinxêre in iconibus. Neque id etiam mirum mihi eſſe videtur; cum nec facile certe ſit, ſingula haec ſtrata illaeſa per vniuerſum cordis ambitnm detrahere altera ab alteris, nec parum etiam laboris operi huic atque patientiae ſit adhibendum; cumque omnino veriſimile etiam videri poſſit, quemadmodum in vna alicuius ſtrati ſede, ſic et in caeteris ſe fibras habere omnibus, atque in vniuerſo ſtrato.

Strata

a) Tab. IX. ſequentibus adiungenda Diſſertationibus, quam confer cum Senaci Tab. VII. fig. 4.

b) Senac Tab. VII. fig. 4.

Strata ventriculi dextri difficiliora euolutu, at certius et adcuratius natura diſtincta.

Certis ergo omnino determinatisque ſtratis fibrae, dum circa ventriculos voluuntur, diſtinctae ſunt. Difficilius paulisper in dextro ventriculo externum a ſubiecto medio detrahitur. Tenuiſſimae fibrae externae a pariter tenuibus mediis dum ſeparantur, et tenſae rumpuntur facile, et vix etiam distingui ſecernique poſſunt, quin mediae ſimul vna cum externis auferantur. Longe facilius in ſiniſtro ventriculo quaelibet exteriores fibrae a ſuis ſibi contiguis interioribus diſcerni pariter et ſeparari poſſunt. Craſſiores enim faſciculi fibraeque, quibus ſtrata huius ventriculi conſtruuntur, neque abrumpi ſe facile ſinunt, neque vlla difficultas eſt, quin alius ab alio faſciculus, aliaque craſſior fibrarum faſcia ab alia, ſeparetur atque detrahatur. Verum ſi opera adhibita in aliqua ſede tantum eleuatas primum fibras externas ventriculi dextri recte a mediis diſtinxeris; facili negotio (cultro modo ne medias forte, vel ipſas externas quoque, laedas, caueto,) totum ſtratum paulatim externum a medio detrahitur. Atque tum quidem certus quoque eſſe poſſis, nullam fibram cum ſtrato externo eſſe ablatam, quae ad medium pertineret, nullam in medio relictam, quae ſtrati eſſet fibra externi; ita ſcilicet et tenuia ſunt haec ſtrata ventriculi dextri, ſimplicibusque ſolitariis, quamuis intricatis inter ſe, fibris componuntur, et facilis eſt atque continua ſolutio eorum, dummodo caute haec fiat, ſenſimque et ſenſim inſtituatur. Si vel exigua enim portio fibrarum ex ſtrato externo in medio relinqueretur, defectum continuo in externo habebis manifeſtum ob tenuitatem ſtratorum; columnae contra illico apparebunt, et interna ventriculi ſtructura, vbi minimam de medio abſtuleris ſtrato portiunculam. Et facilis ſolutio pariter ſtratorum cauet, ne mediae pro externis, externaeue pro mediis aut habeantur aut poſſint haberi; ſiquidem eiusdem ſtra-

ti

ti fibrae multo et magis inter se ipsas sunt intricatae, quam fibrae diuersorum stratorum, et firmius inter se mutuo cohaerent. Sic naturalia ergo, quamquam difficiliora inquisitu, sunt strata ventriculi dextri, fibraeque a natura ipsa in strata distinctae; vt nec arte hic ordo fibrarum turbari possit, nec quidquam arbitrio in distinguendis huius ventriculi stratis sit relictum.

Sinistri solutu facilia difficilius recte distinguuntur.

Aliter cum stratis comparatum est ventriculi sinistri. In eo crassioribus fibrarum fasciculis, vel pluribus etiam sibi mutuo superstratarum fibrarum seriebus, singula strata composita, facile, aut aliquam sui portionem cedunt subiecto strato interiori, dum ab eo soluuntur, quam ipsi huic interiori strato propriam esse putes, aut secum abducunt aliquam ex eo portionem fibrarum, quam credas ad exterius pertinere stratum, ab interiori solutum. Idque eo facilius fieri potest, cum haud difficilius, quae sibi mutuo superstratae fibrae vnum stratum efficiunt, quam strata varia ipsa a se inuicem soluantur. Accedit etiam, vt aliis in sedibus crassiora strata, in aliis tenuiora, existant, quo facilitas errandi valdopere augetur. Fieri ergo potest, vt minorem nunc numerum stratorum in sinistro ventriculo inuenias, nunc multo maiorem; prout strata scilicet aut crassiora effeceris, aut nimia adhibita arte tenuiora. Sola ergo, quominus hoc fiat, diuersa directio fibrarum impedire potest, quae, vbi detegitur, vnicum fere indicium est noui sequentis strati, cuius fibras intactas relinquere oportet. Atque haec quidem vix sufficit tamen vbique ad omnes praecauendos errores, quibus in distinguendis determinandisque stratis indagator obnoxius est. Ita sensim enim sensimque in sedibus nonnullis fibrae directionem suam mutare videntur, vt, nisi aliunde productae fibrae sui continuatione tunc diuersorum stra-

torum ductum indicarent, etiam ne hoc quidem directionis fibrarum auxilio diuerſa ſtrata earum in ſedibus illis diſtinguere poſſes. Quamquam ergo multo omnino facilius in ſiniſtro, quam in dextro, ventriculo, imo nullo etiam negotio, fibrae a fibris diſtinguantur ſubiectis, et ſeparentur, detrahanturque; difficile tamen eo magis non modo diſtinguere eſt in eo ventriculo naturalia ſtrata ab iis, que arte anatomicus efficere poteſt, et praecauere omnes in iis diſtinguendis errores, ſed omnino concedendum eſt quoque, minus ſua natura determinata definitaque ſtrata in ſiniſtro, quam in dextro, ventriculo eſſe. Paucioribus ſcilicet, iisque minus certis, indiciis ſe ita in ſiniſtro ventriculo ſtrata fibrarum diſtinguunt, vt, quamuis accurate in iis diſcernendis proceſſeris, aliquid tamen arbitrio relictum eſſe videatur.

Tria certiſſima ſtrata ventriculi dextri.

Tria ergo omnino, natura diſtincta, ſtrata fibrarum in dextro ventriculo dantur. Quorum primum, *a*) in tertia diſſertatione deſcriptum, *externum*, fibris conſtat, a baſi et ſtria ventriculi ſiniſtrorſum verſus crenam et apicem in ſuperiori ſuperficie *b*), dextrorſum oblique verſus marginem et apicem in inferiori *c*), ea ratione deſcendentibus, vt transuerſali ductui vbique progreſſus obliquus ille, et multo quam longitudinali, fit propior. Secundum, ſeu medium, ſtratum a ſtria et apice, decuſſando fibras externas, verſus crenam et baſin ſiniſtrorſum oblique in ſuperiori *d*), oblique dextrorſum, verſus marginem et baſin, in inferiori ſuperficie, *e*) ea ratione quidem fibris ſuis adſcendit,

a) Tab I. III. IV. VI.
b) Tab. I. IV.
c) Tab. III. VI.
d) Tab. VII.
e) Tab. IX.

dit, vt multo magis pariter ad transuerſam quam ad longitudinalem directionem obliquus ille progreſſus inclinet. Tum porro vero, quae parum vbique in medio hoc ſtrato adſcendunt, fibrae, quo propius ad crenam in ſuperiori ſuperficie accedunt, eo et continuo ad transuerſum magis declinant ductum, vt proximae crenae, niſi omnino deſcendunt, transuerſim tamen progrediantur. Sic parum in his prope crenam ſedibus directione differunt a fibris ſtrati externi, et angulis eas, nonniſi acutiſſimis, decuſſant. Praeterea id notabile quoque eſſe videtur de mediis fibris, quod, quo propius ad crenam ſuo decurſu accedunt, eo et firmius ſimul adhaereant fibris externis, vt proximae crenae vix etiam ſeparari ab illis poſſint. Eademque in ſeparandis his fibris difficultas verſus apicem ſenſim ſenſimque increſcere mihi viſa eſt. Tertium ſtratum internum, quod in apertis ventriculis continuo, etiam ſine praeparatione, apparet, medias externasque fibras ſuo fibrarum progreſſu decuſſat, magis multo, quam medium, verſus baſin a ſtria et apice adſcendendo, dextrorſum oblique in inferiori, ſiniſtrorſum in ſuperiori, ſuperficie. Frequenter, vt notum eſt, collectae in faſciculos hae fibrae a parietibus ventriculi diſſiliunt, iterumque ſe iisdem adiungunt, vt transuerſim etiam ſaepius per mediam cauitatem proſilire nonnulli eorum faſciculorum oppoſitosque connectere parietes inueniantur. His varie ramificatis ſimul, interque ſe ipſos anaſtomoſibus coniunctis, columnae dictae, et interna reticularis ſtructura, ventriculi efficiuntur.

Sex ſtrata ſiniſtri.

Mea quidem ſententia ſex ſtrata fibrarum, natura diſtincta, in ventriculo ſiniſtro, ſi nempe et columnas cenſueris, internamque reticularem ſtructuram, ſi non, quinque, exiſtunt, quorum in brutis, quatuor *Lowerus*, in homine tria tantum,

 errore

errore manifeſto, numerauit, quibusque numerandis *Senacus* cum caeteris de corde ſcriptoribus potius abſtinuit. Primum externum eſt, quod in quarta diſſertatione deſcripſi. *a*) Huius fibrae adeo a baſi ſiniſtrorſum oblique in ſuperiori ſuperficie *b*), dextrorſum in inferiori *c*), verſus apicem deſcendunt, vt longitudinali ductui, multo quam transuerſali, propiores, imo proximae, ſint, et in plurimis ſedibus etiam pro vere longitudinalibus haberi queant. Latos praeterea craſſosque, at planos, funes funiculosque hae fibrae externae et longos, paſſimque ramificatos, collectae efficiunt: vt vel ſolis his notis ab omnibus interioribus externum hoc ſtratum facili negotio diſtinguatur. Oblique pariter, ſiniſtrorſum in ſuperiori, *d*) dextrorſum in inferiori, ſuperficie *e*) ſtratum ſecundum a baſi et crena verſus apicem et ſtriam fibris ſuis, at ea ratione, deſcendit, vt multo transuerſali ductui fibrae, quam longitudinali, ſint propiores, vtque nonnullis in ſedibus omnino pro transverſis poſſint haberi. Nullum veſtigium ramificationis funium in hoc ſtrato inuenitur. Funiculi tamen longi, ſolitis fibris craſſiores, circa baſin maxime, poſterioremque regionem, occurrunt; vt, quamuis longe diuerſum, aliquam tamen affinitatem hoc ſtratum ſecundum cum externo habeat. Tertium *f*) maxima ſui parte a crena et apice verſus baſin et ſtriam ſiniſtrorſum

a) Tab. I. B. C. D.

b) Tab. citat.

c) Tab. III. A. B. C.

d) Tab. VII.

e) Tab. IX.

f) Quamuis ſingula ſtrata cordis eiusdem, cuius nunc maxime deſcriptionem trado, picta dudum et Academiae repraeſentata, habeam; cum ordinem tamen iconum ob aliarum forte inter illas inſertionem conſtituere nondum poſſim; citationes, eo magis etiam, omitto, quod, quota ſingula ſtrata ſint, iconibus communicatis, facile intelligetur.

ſtrorſum oblique in ſuperiori, dextrorſum in inferiori, ſuperficie fibris ſuis, et ea ratione, adſcendit, vt medium quaſi locum fibrae inter longitudinales et transuerſales teneant, angulosque efficiant cum vtroque dictorum ductuum aequales, ſcilicet ſemirectos. Longis praeterea ſeparatisque a ſe mutuo fasciis hoc ſtratum in ſuperiori ſuperficie inſigne eſt, tenuioribus funiculis in inferiori diſtinguitur. Quod proprie igitur transverſum ſtratum vocares, in ſiniſtro ventriculo non datur; cum ſecundum ſuis fibris deſcendat, tertium iam adſcendat. Nonnullis in ſedibus quidem ita propinquas ductui transuerſo fibras ſecundum, imo et ipſum hoc tertium quoque, habet, vt paene pro transuerſis fibrae in iis ſedibus haberi poſſint; at plurima tamen parte fibrarum manifeſto ſecundum ſtratum deſcendit, tertium adeo adſcendit, vt a longitudinalibus non magis fibrae, quam a transuerſis, differant. Mire ergo vir optimus, meritiſſimus de cordis anatomia *Senacus*, hac ſua in paruis ſpatiolis fibras indagandi methodo errauit, qui, velut praecipuum atque ſingulare, transuerſum hoc, quod nusquam exiſtit, ſtratum poſuit; vtpote medium ſcilicet inter reliqua quod eſſet, eaque diſtingueret. Idemque ex caeteris maxime pingendum etiam elegit. Quartum ſtratum adeo a crena ad baſin fibris ſuis adſcendit, ſiniſtrorſum oblique in ſuperiori, dextrorſum in inferiori, ſuperficie, vt etiam in iis ſedibus, vbi minus cito in variis ſtratis fibrae ſuam directionem mutare ſolent, multo tamen longitudinali, quam transuerſali, ductui ſint propiores. Quintum recta ab apice ad baſin adſcendit, imo vergit iam potius adſcendendo dextrorſum paulisper, in ſuperficie vtraque. Hoc fibris ſingularibus ſerpentinis, tenuioribus, debilioribusque conſtat, et reticulatum iam in plurimis locis parietem efficit. Denique ſextum, a columnis productum carneis, ipſisque papillis, niſi vel prorſus a ſtratis ventriculi re-

mouere hoc, vel etiam ad quintum referre, velis, oblique dextrorsum suo ductu ab apice versus basin adscendit.

Directio ergo stratorum singulorum diuersa in quasuis fere, maxime sinistri ventriculi, fibras regiones ducit.

Sic, vti primi, siue externi, strati fibrae a basi sinistrorsum oblique ad apicem descendunt; dextrorsum contra oblique ab apice ad basin cum fibrae adscendant stratorum vltimorum, quinti sextique; oppositae recta primi strati fibris hae fibrae stratorum vltimorum, eadem cum illis semitam legunt, redeuntque per eam in regionem eandem vltimae fibrae, vnde primae exierant. Quumque mediorum stratorum fibrae nonnisi sensim sensimque ex ea, qua strati externi fibrae feruntur, directione in directionem transeant stratorum vltimorum; singulorum se mutuo decussantibus fibris; nulla regio est, aut nulla directio, in quam non ductas inuenias fibras in ventriculo sinistro. Eadem ratio dispositionis fibrarum in dextro quoque obtinet ventriculo, modo vt, pauciora in eo, tria nimirum, diuersa strata fibrarum cum tantum existant, plures inter eas, in quas ductae fibrae inueniuntur, directiones, quam in sinisto ventriculo, vacuae fibris relinquantur.

De numero stratorum monitum.

Haec ea ergo strata sunt diuersa fibrarum, ex quibus ventriculi cordis construuntur, in quibus distinguendis et determinandis, enumerandisque, vix me errasse crediderim, nisi quis forte ex primo strato, quod circa basin maxime valde crassum est duo efficere voluerit strata, quod vt facile fieri posset, ita contra ordinem naturae id factum mihi videretur.

Monitum de directione stratorum.

Vti vero, minime singulas in variis his stratis fibras similes mutuo sibi ductu et progressu, aut parallelas inter se, esse,

eſſe, in ſuperioribus iam monitum eſt; ita nec eam ſingulae quoque diuerſorum ſtratorum fibrae directionem accurate obſeruant, quas in definiendis iis ſtratis diuerſis indicaui. Maxima pars tantum earum eam exacte ſequitur directionem indicatam. Alia magis, alia minus paulisper, vel verſus transuerſum inclinat ductum, properatque, vel verſus adſcendentem, quorſum per varia ſtrata ſucceſſiue fibrae tendunt; vt media ſcilicet omnium, et ipſa adcurate plurimarum, in ſingulis ſtratis fibrarum directio ea ſit, quam in definitionibus ſtratorum tradidi.

Qua ratione in vniuerſum fibrae a definita directione in ſingulis ſtratis aberrent.

In vniuerſum, ſicuti per ſingula ſtrata ex oblique deſcendente ductu in transuerſum primo vel proximum ei, deinde ex hoc in oblique adſcendentem fibrae ſucceſſiue tranſeunt; magis in eo tranſitu properare videntur in ſtratis ſingulis fibrae, quae apici propiores ſunt, minus, quae medium ambiunt ventriculum, minime, quae circa baſin verſantur. Idque et neceſſe eſt, vt fiat, quemadmodum ex ſequentibus patebit, et, omnino fieri, etiam in ipſo iam externo ſtrato apparet; vbi, quae ex filis oriuntur cartilagineis circa baſin ventriculi, longitudinem fere cordis, ad marginem imprimis, ſequuntur, *a*) oblique magis procedunt, quae, ortae a media crena, medium ventriculum occupant, *b*) et transuerſim denique omnino progrediuntur, quae, proximae apici, ex fine crenae originem ducunt; *c*) inter quas qui ipſi vltimi ſunt, ipſumque tenent api-

a) Tab. IV. Q. R. Tab. VI. 13. 14. 53. Tab. I. C. w. B. Tab. III. 17. 27. 30.
b) Tab. IV. 75. 85. 78. Tab. I. 88. 89. 90. 95.
c) Tab. I. 99. 100. 101. 102. 103. Tab. IV. 92. 93. 94. 95. 97. 98.

apicem, fasciculi terminales *a*) paulisper etiam oblique sinistrorsum iam adscendunt. In solis, quae prope basin ventriculum in strato secundo cingunt, funiculis crassioribus aliqua leuis exceptio locum habere videtur, quae tamen et ipsa, quin peculiarem suam causam habeat, qua explicetur, quaque non obstante regula tamen illa vniuersalis constet, nullus dubito. Isti nempe funiculi in eo strato secundo, atque in sola quidem superiori ventriculi superficie, transuerso ductui proximi iam sunt, cum mediae eiusdem strati fibrae, a media crena ortae, oblique adhucdum descendant. In superficie ventriculi inferiori recte omnino funiculi illi oblique descendunt, mediae fibrae, a crena ortae, fere transuersim in striam transeunt, apici propiores oblique adscendunt. Eadem ratio dispositionis fibrarum, sicuti in strato externo, atque in caeteris omnibus secundi strati regionibus, in singulis reliquis stratis quoque obseruatur.

Qua ratione in vniuersum defectu strata laborent.

Tantum abest autem, quin integra atque perfecta sint singula haec strata, totosque complectantur ventriculos, aut quin magnitudine inter se sint aequalia, vt tertia potius non modo, quartaue, sed dimidia quoque, imo duabus tertiis partibus sui, et amplius, interiora maxime sinistri ventriculi strata, deficiant. In vniuersum haec regula esse videtur stabilita: vt sola externa strata super totos se extendant ventriculos, media quaeuis aliqua sui parte deficiant; atque id ea quidem ratione, vt, internis reticularibus ventriculorum structuris, siue stratis internis, exceptis, quae media inter haec et externa sunt, quo sunt singula interiora, eo maioris sui partis defectu laborent. Deinde vt versus apicem ventriculorum primum strata

a) Tab. IV. 99. 103. 104. Tab. I. 104.

ta deficere incipiant; hinc verſus baſin ſucceſſiue in ſequentibus ſtratis defectus progrediatur; vt quo ſunt ſtrata minora, quoue interiora, eo etiam magis ad ſolam ventriculi baſin ſe recipiant. Denique vt, ſicut ab apice ad baſin, a ſtria ſimul ad crenam in ventriculo ſiniſtro, in dextro a crena ad ſtriam, nimirum ab inſertionis fibrarum ſede ad ſedem ortus, defectus ille in variis ſibi mutuo ſuccedentibus ſtratis magis magisque adſcendat. Quo ſtrata ergo, prout minora ſucceſſiue, interioraque, exiſtunt, ad baſin exacte aortae in ſiniſtro ventriculo, ſiue orificium eius arterioſum, in dextro ad angulum inter ſtriam et baſin, ſe magis magisque retrahunt; quae quippe ſedes indicatae medium inter baſin et crenam in ſiniſtro ventriculo, inter baſin et ſtriam in dextro, locum occupant.

Defectus ſtrati medii ventriculi dextri.

Stratum ſecundum, ſeu medium, ventriculi dextri in inferiori ſuperficie quidem a baſi ad apicem vsque ſe extendit, vt variis in ſedibus tamen, apici propioribus, hiatus minores ſingulari certaque ſtructura effecti, paſſim relinquantur. Vbi ad marginem vero accedunt hae fibrae ſtrati ſecundi, in parte iam ventrali deficere incipiunt, magnis hiatibus formatis, in quibus interna reticularis ventriculi ſtructura apparet; in tota apicis regione ad ipſum marginem omnino deſinunt, quod qua fiat in ſingulis ſtratis ratione, in deſcriptionibus ſtratorum explicabitur. Vt inferior ergo ventriculi paries totus, et duae tertiae quaſi partes ſuperioris, ſecundo ſeu medio hoc ſtrato tegantur, reliqua tertia ſuperioris parietis pars circa apicem vacua reſtet.

Secundi ſtrati ventriculi ſiniſtri defectus.

Secundum ſtratum ſiniſtri ventriculi in omnibus mediis completiſſimum eſt. Aliqua tamen pars et huic, ad ipſum apicem quidem, deficit. Remotis enim ſtrati externi procurren-

tibus funiculis, extremitatibusque eorum vnciformibus, ad terminalem vsque inferiorem fasciculum, ad quem illae se applicant *a*); itemque finibus remotis fibrarum omnium ordinis secundi *b*), quibus ad inferiorem pariter is ordo se applicat fasciculum terminalem, focum efficiendo inferiorem; hiatus continuo apparet, anguſtior quidem, at longus, secundum totum tractum terminalis fasciculi inferioris, ad quem finibus suis curvatis fibrae applicatae erant *c*), a centro communi focorum *d*), vbi fasciculus inseritur, ad eius ortum vsque *e*) se extendens. Is vsque in cauitatem ventriculi apertus penetrat, vt interna ventriculi structura reticularis et columnae carneae appareant. Sic neque secundum stratum neque vllum interiorum ad hanc vsque sedem pertingit. Et solis igitur extremitatibus fasciculorum procurrentium vnciformibus et curuatis finibus fibrarum ordinis secundi, quibus focus inferior formatur, hiatus iste tegitur.

Defectus strati tertii ventriculi sinistri.

Tertium ventriculi sinistri stratum totam posteriorem circa basin regionem, deinde et mediam, siue ventralem, ventriculi in superficie vtraque fibris suis occupat. Tota apicis regio strato tertio caret. Nimirum a fine crenae vltimae huius strati fibrae terminatrices oblique sinistrorsum ad imam ventralem regionem vsque in superiori superficie adscendunt, flexaeque circa marginem transuersim fere in inferiori ad striam progrediuntur. Vt ipsa apicis regio tota, quarta circiter aut quinta

a) Tab. IV. 101. 105.
b) Tab. IV. 106. Tab. VI. 53. 68. 69. 72. 75.
c) Tab. VI. 4. 5.
d) Tab. IV. 102. Tab. VI. 80.
e) Tab. VI. 4.

ta pars ventriculi, his terminatricibus fibris a ſtrato tertio excludatur.

Quarti eiusdem ſtrati defectus.

Quartum eiusdem ventriculi ſtratum poſteriorem ſolam ad baſin regionem ventriculi in ſuperiori ſuperficie occupat, anguſtiſſima tantum ſtrati huius portio iuxta crenam per ventralem ſeu mediam regionem, ad initium vsque regionis apicis decurrit. In ſuperficie inferiori maior ſolummodo portio regionis ad baſin hoc ſtrato tegitur; notabilis portio in hac quoque regione caret. Nimirum a fine partis mediae crenae ita oblique vltimae terminatrices huius ſtrati fibrae verſus baſin adſcendunt, vt per totam mediam ventriculi regionem longitudinem fere ſuo ductu ſequantur. In poſteriori ad baſin regione curuatae demum marginem verſus et baſin oblique progrediuntur. Hoc flexae eodem circa marginem ductu obliquo per inferiorem ſuperficiem quoque ad principium ſtriae vsque decurrunt; quo dimidia quaſi diagonalis pars regionis poſterioris ad baſin in inferiori ſuperficie hoc ſtrato occupatur. Sic tota ergo apicis regio in ſuperficie ſuperiori, et tota fere ventralis, paruâ tantum ad crenam portione exceptâ, duae omnino tertiae partes ventriculi, ſtrato quarto carent. In inferiori et tota apicis regio, et ventralis regio tota, et dimidia pars porro poſterioris ad baſin regionis, ſummatim tres quartae, niſi amplius, totius ventriculi partes, defectu huius ſtrati laborant.

Qua quintum et ſextum ſtrata ſe habeant ratione.

Quintum denique ſiniſtri ventriculi ſtratum, niſi ad internum hoc potius referre volueris, tenue eſt et per interualla ſingulari modo, velut reticula im productum, deficit, vnaque cum interno, ſeu ſexto, columnis effecto carneis, papillisque et reliqua ſeparata retiformi ſtructura per totum fere ventriculum ſe ſuper internos parietes extendit.

Vnde, cur circa baſin craſſiores parietes ventriculorum, tenuiores verſus apicem, ſint, intelligitur.

Neminem anatomicorum latet, diuerſa in diuerſis regionibus parietes ventriculorum craſſitie donatos eſſe. Quotiescunque enim hi aperiuntur, quod longitudinali ſcilicet ſectione, ab apice ad baſin ducta, fieri ſolet, craſſiores continuo prope baſin, tenuiores verſus apicem, ſe ſecti parietes obtrudunt. Minus quidem inſigniter in dextro ventriculo, qui totus tenuior eſt, at eo magis in craſſiori ſiniſtro ſe res manifeſtat. Craſſior dexter tamen multo per totam baſilarem, perque angularem et ventralem regionem, tenuior longe in tota apicis regione eſt. Nimirum craſſior certe tribus compoſitus ſtratis fibrarum ventriculus eſt, quocunque medium vsque ſe ſtratum extendit; tenuior omnino duobus tantum factus, vbicunque illud deficit. Siniſter ventriculus maximam in poſteriori circa baſin regione craſſitiem habet. Inde non, vti in dextro, ad certum terminum vsque apicem verſus eadem craſſities deſcendit, eadem a termino illo ad apicem vsque imminuta craſſitie manente; ſed ſenſim ſenſimque decreſcit; vt omnium tenuiſſimus ipſe apex ſit, poſterior apicis regio illum manifeſto craſſitie ſuperet; media ventralis pars multo hac apicis regione craſſior, et omnium craſſiſſima poſtrema ſit regio circa baſin. Non vnum ſcilicet ſtratum eſt medium, in hoc ſiniſtro ventriculo, velut in dextro, quod vna tantum in parte ventriculi, aequaliter vbique, quovsque id ſe extenderet, parietem eius craſſitie augeret; ſed plura dantur eiusmodi media ſtrata, quorum alia aliis magis continuo longiusque a baſi, vnde ſingula incipiunt, verſus apicem ſe extendunt, eaque ratione, vt ſenſim ſenſimque a baſi verſus apicem craſſior ventriculi paries craſſitie imminuatur, efficiunt. Quod ſolum ergo, quod quotidiana ſcilicet obſeruatio inculcat, diuerſa nimirum in ſedibus diuerſis craſſitie parietes donatos eſſe ventriculorum, ſi optimi et acuti caeterum

Viri

Viri conſiderauiſſent; nunquam profecto, integra ſingula completaque ventriculorum ſtrata eſſe, in animum ſibi potuiſſent inducere, vt credant; etiamſi nonniſi exiguas tantum portiunculas horum ſtratorum vidiſſent.

Differentia inter fibras medias et externas.

Fibrae caeterum ipſae, quibus media ſtrata contexta ſunt, alia paulisper ac externorum ſtratorum fibrae natura eſſe viſae ſunt mihi. Videbantur enim molliores magisque ſolubiles a ſe mutuo, certe minus intricatae inter ſe externis, minusque fibrillis vbique, velut illae, connexae. Sunt magis fibrae a fibris, fasciculique a fasciculis, diſtincti, et longe in vniuerſum, cum fibrae, tum fasciculi, faciliores obſeruatu, et euolutu ſeparatuque faciliores.

Cur magis externae quam mediae intricatae ſint inter ſe.

Videntur hoc fine ventriculi ſtratis circumdati eſſe externis, vt maius robur non modo iis et vis maior in contractione addatur, ſed ſimul vt firmiter quoque mediorum ſtratorum omnium tum ſingulae fibrae, tum fasciae fibrarum diuerſae contineantur; quo minus in validiſſima cordis actione vacillare et ex ſitu ſuo naturali cedere queant. Ita et tenuibus ſaepe et ſparſis ſeparatisque fasciis interiora imprimis ſtrata ventriculi ſiniſtri, et medium dextri quoque, in ſedibus nonnullis conflata ſunt; cum externum contra ſtratum ventriculi dextri denſioribus longe et firmioribus fasciis, ſiniſtri craſſiſſimis firmiſſimisque funibus, prope baſin maxime, vbi maior mediorum ſtratorum numerus eſt, conſtructa non modo ſint, ſed fascias eas funesque et fasciculos, immo ſingulas fibras copioſiſſimis vbique fibrillis quoque tam firmiter inter ſe mutuo contextas intricatasque habeant, vt vix facilius remoueri a ſe mutuo et diſpelli diuerſae fasciae funesque aut fibrae, quam funes craſſiſſi-

mi ipſi disrumpi poſſe videantur. Haec differentia ergo inter ſtrata externa et media eſt, et cauſa veriſimilis, cur valida ſtrata externa et prorſus completa integraque faſcias non modo et funes, ſed ſingulas fibras quoque, tam firmis nexibus inter ſe mutuo complicatas habeant.

Mediae fibrae in faſcias maximam partem diſpoſitae.

Non magis media ſtrata quam externa ſimplices, quibus conſtructa eſſent, fibras habent, ſicuti ſcriptoribus viſum eſt; ſed faſcias plurimam partem aut faſciculos mediae fibrae collectae efficiunt, ortu, inſertione, directione fibrarum, immo interſtitiis quoque frequenter, diſtinctas, quibus ſuper ventriculos ductis ſingula ſtrata formantur; vt tanquam diuerſi musculi hae faſciae non minus quam in ſtratis externis conſiderari poſſint.

Nexus ſtratorum inter ſe: celluloſa.

Quamuis manifeſto, non celluloſae, ſed verae carneae, fibrillae ſint, quibus in externo ſtrato fibrae faſciaeque, aut faſciculi, fibrarum tam variis inter ſe connectuntur modis; minime tamen omnem celluloſae texturae interuentum inter fibras faſciasque, omnemue eius in cordis carnes inſertionem negauero, quam caeterum tenuiſſimam omnino et vix obſervabilem eſſe celluloſam oportet. Verum ſi vllibi in ipſa ſubſtantia cordis celluloſa datur; inter ſtratum id medium et externum eſt ventriculi dextri. Adeo ſcilicet facile, adeo accurate, externum hoc ſtratum a medio ſecedit. Haec facilis ſolubilitas enim alterius ab altero ſtrato, qua plane illaeſae integraeque fibrae ſtratorum, atque fere intactae, conſeruantur, miro modo mihi, aliud prorſus, quo ſtrata ſecum cohaerent inuicem, vinculum eſſe, aliud, quo fibrae inter ſe connectuntur

tur ſtrati eiusdem, demonſtrare videtur. Atque eandem fere facilitatem quoque in ſoluendis ſtratis fibrarum ventriculi ſiniſtri obſeruaui. Verum in ſtratis dextri ventriculi, dum a ſe mutuo ſoluebantur, frequenter etiam contigit, vt fibrillas manifeſto obſeruarem, iis in ſedibus maxime, vbi in diuerſas faſcias fibrae ſtrati medii diſtinctae erant. Hae ſatis longae quidem fibrillae in ſedibus iis, lineasque facile ſuperantes duas, obſeruatae; vt de exiſtentia earum nullum prorſus dubium ſupereſſe poſſit. Quamuis etiam ſingulari qualitate illae, de qua continuo dicam, donatae eſſent, veram tamen celluloſae ſpeciem imprimis diſpoſitio, ſitus, directio et figura demonſtrabant. In interſtitia enim, vt monui, maxime inter duas vicinas faſcias medii ſtrati a ſtrato vsque externo deſcendebant, faſcias diſtinguendo, videbanturque ad internum penetrare ſtratum, quod pariter ſcilicet cum inferiori, ſicut exterius cum ſuperiori, ſuperficie medii connecterent. In qua diſpoſitione ſituque et vſu nemo non facile telam cognoſcit celluloſam. Certum ergo omnino eſt, vera celluloſa textura et diſtincta eſſe a ſe inuicem diuerſa in ventriculis ſtrata fibrarum, vt fibris illaeſis facile ſeparari alia ab aliis poſſint, et connexa tamen quoque inter ſe mutuo, vt vnum ventriculum firmum ſimul ſumta efficiant.

Fibrillis ſemicarneis.

Verum iſtae quidem longiores fibrillae quibus faſciae a faſciis in medio ſtrato ventriculi dextri diſtinguebantur, quaeque in interſtitia deſcendebant faſciarum, colore erant rubro, ſubfuſco, ſimili prorſus fibrarum muſcularium colori. Neque in corde recenti ſolum rubrae, ſed fuſcae quoque, vt ſolent fibrae muſculares, in corde apparebant, diutius in aqua detento, ex quo omnis pridem ſanguis extractus elotusque fuerat. Vt ſi ex colore quidem iudicares, veras omnino crederes carneas

neas fibrillas; cui rei tamen tota textura earum et habitus et diſpoſitio refragantur. Si meam breuibus dicere licet ſententiam, ſemicarneas quaſi eſſe exiſtimo fibrillas eas celluloſas, quae aliquo ſcilicet gradu irritabilitatis donatae ſuum pariter in cordis actione ſymbolum, ad contractionem et attenuationem ſtratorum in ſpecie, conferant. Sunt exempla, vbi albae etiam celluloſae ſubſtantiae irritabilitas abnegari non poteſt. Atque in corde adeo alacris haec vita eſt, vt ex ipſis carneis fibris eam etiam in proxime illas circumdantem celluloſam propagari quodammodo poſſe, nullo modo improbabile videatur. Si quis eiusmodi tranſitus ſubſtantiarum in corpore animali aegre forte tulerit, cui aliud quippe fibra muſcularis, aliud prorſus celluloſa eſſe videretur, in eo quoque concedendo facilis ero. Nimirum verae carneae tum illae fibrillae rubrae erunt, a ſtrato externo ventriculi dextri in interſtitia faſciarum medii ſtrati deſcendentes; nec medium quid ergo inter fibram muſcularem et celluloſam dabitur. At hoc tamen minime negari poterit, munere et vſu fibrillas eas fungi ipſius verae celluloſae, quibus faſciae ſcilicet a ſe mutuo diſtinguuntur, et ſtrata fibrarum inter ſe connectuntur. Denique ſiue carneas eas fibrillas, ſiue celluloſas, eſſe putaueris, minime confundere tamen eas cum iis oportet, quibus in ſtratis ventriculorum externis, imo et in mediis frequenter fibrae cum vicinis fibris, faſciaeque et faſciculi cum vicinis faſciis faſciculisque cohaerent. Hae enim manifeſto muſculares fibrillae ſunt aut fibrae, cum maximam partem ex fibris fibrillae ſecedant vicinis, quae hactenus eam fibram effecerant, in vicinasque tranſeant fibras, continuentque in iis, eas nunc porro vicinas fibras efficiendo. Vt eandem fibrillam primo in aliqua fibra inter ſolitas huius fibrillas deſcendere, dein ſecedere ab illa et in vicinam oblique tranſire, eaque ratione nectentem efficere fibrillam, denique et in hac poſteriori vicina fibra

porro

porro continuare inter ſolitas huius fibrillas, videas; vnde nullum, quin iſtae quidem carneae ſint, dubium eſſe poteſt. Verum et aliud in ſtratis externis nectentium fibrillarum genus datur, quae e latere alterius fibrae in latus alterius tranſeunt quidem oblique, at minime vel ex fibrillis deriuantur fibrae prioris, vel in poſterioris fibrae continuant fibrillas. *a*) Hae quidem aut parum aut nihil a rubris fibrillis, quibus ſtrata connectuntur, differre videntur. Atque mea ſane ſententia vtrumque hoc genus celluloſa ante fuit, deinde in carneam ſenſim abiit naturam.

a) Vide Diſſertationum de Ordine fibrarum cordis tertiam et quartam, vbi de fibrillis nectentibus agitur.

CINERVM CLAVELLATORVM ROSSIAE ITEMQVE CINERVM BETVLINORVM EXAMEN CHEMICVM.

Instituit
J. G. GEORGI.

Conuent. exhib. d. 26 Apr. 1787.

Cineres clauellati (Potasche R. поташъ) syluarum nostrarum productum, respectu saponificinae et commercii externi, adeo curae dignum et aureum est, vt non exiguum operae pretium sit eius cognitioni impendisse operam, nostrisque ab exteris paratas comparasse. Id ergo mihi proposui.

Plurimae Cinerum clauellatorum apud nos fabricae in mediis Rossiae prouinciis, Pensinensi, Nowogorodensi inferiore, Casanensi, reliquis, vbi copiosae frondiferarum arborum sylvae, Betula, Populo tremula, Acere, Tilia, Sorbo, similibus scatentes abundant, cineribus collectis per rusticos, e combustis passim vel e proposito vstis aceruatim lignis suppleri solent. Obseruante Cel. *Pallas*, hae fabricae nuperis temporibus ad meliorem methodum instructae sunt.

Singulae tribus quatuorue magnis ahenis lixiuium propriis vasibus paratum excoquunt et ad siccitatem perductum in furno

furno peculiari adſpirante ad albedinem calcinant. Cinerum annuo ſpatio mille et quingenti vel mille octingenti modii, Ruſſis *Tſchetwert* dicti, ſeu duodecim ad quindecim millia pondo ruſſica (quadraginta ſingula librarum) conſumitur, et cinerum clauellatorum pondo e ſingulo fere modio parari ſolet. In genere vero, his pariter et aliis fabricis quotannis ingens vis cinerum clauellatorum paratur; etenim praeter id, quod inquilinis ſaponificinis et vitrariis officinis, copioſe impenditur, vno anno v. gr. 1786. ad exteros per Portum Petropolitanum ſolum triginta nouem millia, octingenta triginta tria pondo exportata ſunt et quotannis inter 35 et 45 mille pondo exportantur; aeque minus copioſe haec merx per Rigenſem, Reualenſem, Archangelopolitanum, aliosque portus extra fines mittitur.

Varietates cinerum clauellatorum, quae apud nos vulgo proſtant, ſunt:

1. *Cineres clauellatae non depuratae*, peculiari modo in focis, lixiuium igni infundendo, paratae, ſeu cineribus mixtum et ſemicalcinatum Alcali, paruis glebis concretum, admodum cauſticum, et Belgis, ad dealbanda lintea, vulgaribus cineribus clauellatis, quas Sueci ſuo titulo: *Balaſche* exportant, ob maiorem ſalini proportionem praelatum; Ruſſis vero *Ardaſch tertiae bonitatis* audit. Qui debiliori lixiuio ſaturati ſunt cineres a mercatoribus vulgo *Brak* vocatur nec in glebas efficti ſunt.

2. *Cineres clauellati* rudiori excoctione parati, ſecundae bonitatis, tantum *non calcinati.*

3. *Cineres perlati*, Ruſſis, adſcito germanico nomine *Perlaſch*, ſeu primae bonitatis, calcinatione dealbati, reliquis puriores,

riores, attamen multis etiamnum heterogeneis inquinati. Huius datur ſpecies inter reliquos purior, Sali Tartari ſatis ſimilis; Galli praeſertim hanc, licet vulgari duplo cariorem, pro fabricis ſuis coëmunt.

In experimentis, quibus has cinerum clauellatorum varietates ſubieci, pondus centum vnciarum generatim adhibui, facilioris calculi et comparationis cauſa. Proceſſus fere in omnibus ſimplex fuit, vt expoſitione eorum ampliore non ſit opus.

I. Cineres clauellati non depurati.

Obſcura et ſordida erat, partim in glebis, partim ſoluta, admodum humida.

Centum vnciae huius, bulliente aqua elixiuiatae, reſiduam terram argilloſam et lapillos praebuerunt ad vncias 12.

Cinerum mortuorum - - - - -	$37\frac{1}{2}$.
Arenae quartzoſae - - - - -	$2\frac{1}{2}$.
adeoque quisquiliarum - - -	52 vncias.

Lixiuium filtratum flaueſcentis erat coloris, foetoris expers, neque argento polito vapore ſuo ſplendorem ademit.

Sub eius euaporatione leni, praecipitabatur ſubinde pulvis ſalinus, quem decantatione et filtro ſeparabam. Maſſa ſalina tandem in ſtatum ſiccitatis redacta triginta octo vnciarum fuit; iterum vero ſoluta, euaporata et ſubſidente puluisculo priuata rediit ad pondus vnciarum 30. idque purum erat Alcali vegetabile.

Sepa-

Separatus puluis ſalinus poſt ablutionem et exſiccationem quinque cum dimidia vncias pependit. Coctus in aqua in ſolutione ſex drachmas largitus eſt Tartari vitriolati; ſalini praeterea nihil.

Portio non ſoluta in Aqua forti diluta, cum efferuescentia ſoluitur ex parte; ſolutio alcali phlogiſticatum intenſe caeruleum tingit; alcali fixo tandem ſaturata terrae calcareae portionem praebuit, quae edulcorata pondus vnciae et drachmarum ſex aequauit. Non ſolutae ſuperfuerunt vnciae tres, quarum, per fuſionem cum alcali cet. ſilicea natura inuenta eſt.

Amiſſae omnino ſeptem vnciae cum dimidia deperditis particulis et humido a ponderata maſſa reſorpto adtribuendae ſunt.

Ex alia officina deprompti cineres clauellati e centum vnciis praebuerunt

Alcali puri - - - - - - vnc. XXX.

Impura vero merces, quam *Brak* appellari ſupra diximus, tantum dedit Alcali puri - - vnc. XXViij.

II. Cineres clauellati ruditer depurati cinerei.

Cineres clauellati non calcinati in omnibus tabernis, in doliis etiam integris, admodum vnctuoſa, impura et atomis copioſis nigris inquinata eſſe ſolet.

Vnciae centum horum Cinerum continent: Terrae inſolubilis vncias vndecim ex his vncia ſabuli quartzoſi lutriendo ſeparari potuit; reliquum efferueſcebat cum acidis, maximam partem iis ſoluitur et ſolutio cum alcali phlogiſticato

intenſe caerulea euadit. Maior pars huius calcareae, exigua ſiliceae fuit naturae.

E lixiuio flaueſcente ſub euaporatione puluiſculi ſalini haud parum ſubſedit; exſiccatum alcali, denuo ſolutum et euaporatum, puriſſimum, pondere fuit vnciarum quadraginta quinque.

Separatum ab eodem durante euaporatione ſedimentum aqua excoctum dedit Tartari vitriolati vncias XX. terrae ſalinae non ſolubilis calcareae ſimul et ſiliceae vnc. V. Humoris igitur abſorbti et amiſſae durante operatione pondus fuit vnc. XIX. Ex alia taberna depromptae cineres, puri alcali dederunt vnc. XLVji.

III. Cineres perlati Roſſici.

Hae paſſim caeruleſcenti, vireſcenti et flaueſcenti-albo colore variegati, et ſatis ſordidi coloris, inque omnibus tabernis humiditate vnctuoſi eſſe ſolent. Odor lixiuioſus.

Vnciae centum aqua bulliente elixiuatae, reſiduum praebuerunt vnc. vj. drachm. V. Cuius vncia arenae, reliquum terra ſalina fuit, calcareo-ſilicea, vt in praecedentibus experimentis.

Lixivium filtratum ſub euaporatione prima, et denuo ſoluti alcali etiam ſecunda euaporatione, puluisculum ſalinum deiecit; depuratum vero Alcali pondere aequauit vnc. XXXViij. ß.

Pul-

Puluisculus praecipitatus excoctione cum aqua praebuit:
Tartari vitriolati vnc. Vj. dr. 1.
Terrae ſalinae ſiliceo calcareae vnc. II.

Superfuit magma alcaleſcens quinque drachmarum, quod partim alcali vegetabile, partim terra calcarea conſtabat.

In hoc experimento amiſſum pondus vnciarum ſeptem et drachmae 1, quod humori cinerum ex parte tribui debet.

Cineres perlati optimi itaque continent in centum vnciis, Alcali puri vnc. LXXXIV.

Tartari vitriolati - - -	vnc. III. dr. V.
Terrae ſalinae ſiliceo-calcareae -	vnc. ijß.
Sordium non ſolutarum - -	vnc. II. dr. III.
Amiſſi ponderis, vt dixi quantitas -	vnc. Vijß.

Comparatiue ergo ſumtae cinerum clauellatorum Rosſiae varietates ita ſe habent, vt centum vnciae contineant:

Salis Alcali puri e non depurata varietate I.
vnc. XXViij. ad XXXV.
e depurata non calcinata II.
vnc. XLV. ad XL. cum dimidia.
e cineribus perlatis III.
vnc. LXXViij. cum dimid. ad LXXXIV.

Tartari Vitriolati e varietate I. drachm. VI.
e varietate II. vnc. XX.
e varietate III. vnc. VI. drachm. I.

Terrae

Terrae Siliceo calcareae per fortiorem calcinationem alcali ſolutae

e varietate I. vnc. IV. drachm. VI.
e varietate II. vnc. V.
e ciner. perlatis. vnc. II.

Nulla praeterea Salia aliena adfuerunt.

Terrae cinereae partim calcareae, partim ſiliceae, cum arena mixtae

in varietate I. vnc. LII.
in varietate II. vnc. XI.
in varietate III. vnc. VI. drachm. II.

In terris omnium varietatum martialis principii notabile veſtigium.

Humoris abſorpti pondus adfuit

in varietate I. vnc. Viß.
in varietate II. vnc. XIX.
in varietate III. vnc. Viß.

Analyſis Cinerum betulinorum puriſſimorum et mixtorum.

Experimenta varia circa cineres betulinos vulgares inſtitui, non ſolum quia Cineres clauellati roſſici maximam partem e lignis betulinis aliisque inter ſyluas mixtis frutetis parari ſolent; ſed etiam quia chemicorum ſententiae circa cinerum naturam admodum differunt, ea nunc occaſione data adjicio.

Sumſi cineres e ſolo betulino ligno in fornace pura paratas, quorum pondo ſeu 40 librae ruſſicae (570 vnciae medicae,

dicae, ſeu lipſienſium pondus 35½ librae) lignorum aëre ſiccatorum 68 ad 70 pondo (Pud) requirebant.

Ex hac cinerum quantitate coctura ſalinae partis extrahi poſſunt vnciae XL. ad XLI. in quibus continetur:

Alcali puri vegetabilis vnc. XXVIII. ad XXIX.
Tartari Vitriolati - vnc. II. drachm. VI.
Terrae ſiliceo-calcareae ex reſolutione maſſae ſalinae vnc. IX.

Terra mortua cinerum, aqua non ſolubilis, plurimam partem acidis reſoluitur et cum alcali phlogiſticato caeruleo tingitur.

Praeter terram calcaream, ineſt etiam pars ſiliceae naturae.

* * * * * * *

Pondo Cinerum mixtorum e lignis betulinis, ſimul cum populo, alno, vlmo, aliisque ſpatio decem dierum in fornace combuſtorum, edidit ſalinam maſſam pondere vnciarum XLV. et drachmarum VI.

Haec ſalia mediocri calcinatione in maſſam caerulescentem confluxerunt, cuius pondus erat XLIß. vnciarum.

Dedit haec maſſa puri alcali vnc. XXX.
Tartari vitriolati vnc. II. drachm. VII. cum dimidia.
Terrae ab intermedio Sale ſolutae
a. alcalinae vnc. VII. drachm. IV.
b. Siliceae vnc. I. drachm. I. cum dimid.

Volui ex hac terra, methodo a Clariſſimo *Scheel* in Act. Holmienſibus indicata, ſolutione per acidum nitri et praecipitatione per acidum vitrioli, elicere Magneſiam (*Bitterſalzerde*); nullam vero hoc proceſſu obtinui. Dum poſtea terram calcaream per alcali praecipitatam acido vitrioli diluto vltra modum ſaturarem, ex aqua a ſelenite cryſtalliſata reliqua, ope ſalis alcali veram Magneſiam praecipitaui, quae ad totam maſſam circiter tres drachmas effeciſſe videbatur.

Terra mortua cinerum erat pondere 530 vnciarum et magneti copioſas particulas ferreas largiebatur; feruebat cum acidis et ſoluta alcali phlogiſticatum caeruleo tingebat. Lutriendo non bene in partes diſtinctas ſeparari potuit; igni follibus excitato expoſita intra viginti minuta in vitrum duriſſimum, obſcure caeruleum, transparens, confluxit.

Magneſium (*Braunſtein*), quod Chemici Sueci copioſe cineribus ineſſe perhibent, methodo Clariſſ. *Scheel* in Acta Holmienſ. pro 1774. tradita, fruſtra quaeſiui; praecipitata enim calcinatione tantum cinerea euaſerunt.

Magneſiam albam ſupra indicata ratione etiam ex hac terra elicui, et videbatur in totam maſſam efficere pondus drachmarum quinque granas.

Particulas martiales e minori portione ſolutionis per alcali phlogiſticatum omnino praecitaui et praecipitatam calcinaui; vnde calculo facto prodiit in totam maſſam pondus vnius drachmae cum XLV granis. Videtur autem plus ferri ineſſe, quandoquidem terra etiam ſilicea, acido non ſolubilis, marte euidenter inquinata eſt.

Terrae

Terrae calcareae, ſimul cum exigua magneſiae proportione, pondus erat vnciarum 332 cum 2 drachmis; terrae non ſolubilis vnciar. 89. drachm. 3.

Haec euidenter erat mixta arenulis ſiliceis, et marte admodum inquinata, per ſe non fluxilis, ſed aequali portione ſalis alcali mixta. Vitrum impurum et cum triplo eiusdem ſalis in vitrum deliquescens vertebatur; vt euidenter eſſet terra ſilicea impurior.

MINERALIVM QVORVNDAM RARIORVM RECENSIO,

ADIECTIS OBSERVATIONIBVS GEOLOGICIS.

Auctore

J. J. FERBER.

Conuent. exhib. die 2 Iulii. 1787.

Anno proxime praeterlapſo Petropoli diſcedens, Saxoniam, Bohemiam et Vngariam petii, vt nuper detectam artis amalgamatoriae methodum, quam Celeberrimo Bornio debemus, addiſcerem et quae noua e terrae gremio protracta ſunt corpora mineralis proſapiae, poſtquam fertiliſſimae Saxoniae et Status Auſtriaci prouincias plurimis abhinc annis viſitarem, oculis luſtrarem et quorum ſpecimina adquiri poterant, in ius meum conuerterem. Nec ſpem fefellit exſpectatio. Tot tantasque vidi regni mineralis diuitias, Viennae praeſertim cumulatas, tam ſpecioſa, tam perfecta rariorum quoque corporum ſpecimina in variis ibidem Lithophylaciis aſſeruata, vt re ipſa dubitem, an maiorem copiam ſelectioraue exemplaria in alio vllo loco obſeruare liceat. Eminet inprimis Muſeum caeſareum, cura laudati Bornii valde locupletatum ſplendidumque. Succedunt dein collectiones priuatae Celeb. Jacquini, Peithneri, Fichtel, Comitis Wrbna, nobilis Virginis de Raab, Clariſſ. Stützii et quae ſunt reliquae, in quibus omnibus ac ſingulis bene multa extant

tant mineralia hucusque parum cognita, e fodinis praeſertim auſtriaco imperio ſubiectis, intra decennium et quod excurrit temporis ſpatium eruta et mineralogorum attentione maxime digna. Amicorum partim beneuolentia, partim quoque apud eos, qui foſſilia vendunt, ſoluto pretio haud leuem rariorum et nouorum mineralium ſupellectilem mihi comparaui, eo quidem fine vt non modo priſtinae collectionis meae molem augerem et ornarem, verum etiam vt minus cognita minusque deſcripta data occaſione in chemicum examen reuocarem et tandem nouae editioni Sciagraphiae Bergmannianae, quam molior, ſuis locis inſererem. Hoc antequam fieri poteſt, Imperiali Academiae Scientiarum haud ingratum fore ſpero, ſi ea, quae attentu maxime digna mihi viſa ſunt, leui adumbratione in medium proferam. Merentur autem Mineralogorum attentionem non modo foſſilia plane noua, i. e. quae noua prorſus genera nouasque ſpecies antea non obuias conſtituunt, cuius indolis haud multa ſane in Europa noſtra iam amplius detegi poſſunt; ſed ea quoque, quae varietatum nomine veniunt et forma cryſtallina, colore aliisue notis externis, vel et iam loco natali, a congeneribus differunt. Horum ſtudium, corporum non modo cognitionem extendit, auget, perficit, ideoque flocci faciendum non eſt, quamuis claſſificationis fundamentum ſola analyſi chemica nitatur; ſed geographiae mineralogicae commodis multum quoque inſeruit, quare veris naturae ſcrutatoribus curae cordique ſemper erit. Vno alteroue reſpectu, ni fallor, notatu dignae ſunt varietates foſſilium iam recenſendae, quas inter nonnullae occurrunt, quas nouas ſpecies regni mineralis ſalutare nullus dubito.

1. *Calx vitriolata* ſeu *Gypſum radiatum* (Strahlgips) colore rubro e fodinis ſalis gemmae ad *Tordam* Tranſyluaniae. Vidi quoque ex *Iſchel* in Auſtria ſuperiore, nec non

ex *Hiſpania.* Colore albo communiter occurrit; haec vero varietas rubra rarior, eodem ſine dubio principio martiali tincta, quo ſal gemmae ſaepe rubeſcit.

2. *Calx vitriolata* ſeu *Alabaſtrum* albo et violaceo variegatum e *Szamobor* Croatiae. Idem e *Rosznau* Morauiae. Ex his locis antea mihi ignotum fuit; quoniam vero geographia phyſica, in cunis etiamnum vagiens, eo magis promouetur, quo melius omnia ac ſingula corpora mineralia cuiuscunque loci cognoſcimus, quibus cruſta telluris componitur, non ſuperuacaneum, haec loca notare.

3. *Calcareus* montem efficiens prope *Idriam*, in quo vena fragmentis rotundatis agathinis repleta occurrit. Conſiderationem phyſicam potius, quam mineralogicam ſtricte ſumtam, meretur hoc phoenomenon, et ideo hic notatur. Montes nimirum calcarii idrienſes, qui venam ſchiſtoſam, hydrargyrum largiens, fouent, inter primaevos a certis auctoribus numerari ſolent. Quo iure autem ex adductis patet.

4. *Calcareus* vulgo *flos ferri* dictus, pulcherrimis ramificationibus floſculoſis figuratus, e ferri fodina *Sti. Leonhardi* in Carinthia, multum forma differt a flore ferri ſtiriaco, vix autem verbis clare deſcribi poteſt Colore pulchre virideſcenti ad *Schwatz* Tyrol. occurrit.

5. *Calcareus ſpatoſus* ſeu ſpatum calcareum colore viridi e *Boicka* Tranſyluaniae. Duplicans colore violaceo, nec non luteſcente, ex *Hercynia* vidi.

6. *Calx fluorata* vulgo: Fluor mineralis, *forma puluerulenta* e *Marmaros* Vngariae. Carbonibus ignitis iniectus phosphoreſcit.

Fluor cubicus coloris lutei, marginibus violaceis, ex *Ehrenfriedersdorf* Saxoniae.

Fluor

Fluor cubicus coloris rosacei ex *Heluetia*, in museo caesar. vienensi.

7. *Calx aërata* argillaceo et siliceo inquinata, seu *Marga, instar Aluminis crystallisata.* E *Pacherstolln* Schemnitzii.

8. *Spatum ponderosum* solidum amorphum, quartso mixtum et ideo chalybe percussum scintillans, e *Waldstein* prope Faistritz ad fluuium Muhr in Stiria. Venas plumbiferas comitatur. Textura non spatosa, sed solida vel compacta gaudet, quartso vulgari amorpho simile, sed gravitate specifica maiore donatum. *Felsoebaniae* in Vngar. superiore spatum ponderosum occurrit, antimonio intime mixtum et hoc metallo vel minera eius aequabiliter tinctum.

9. *Magnesia vitriolata natiua*, in Serpentino destructo efflorescens, e *Szamobor* Croatiae. Nouam omnino salis natiui speciem, antea non obseruatam constituit.

10. *Lithomarga* quae fistulis tabacariis turcicis inseruit (Meerschaumerde) quoad locum natalem et situm, quo ibi occurrit, nondum satis nota fuit. Inuenitur autem ad *Bruzam* Asiae minoris, non in stratis, sed in venis montium. Argilla quae fistulis tabacariis turcicis rubris inseruit, ad Constantinopolin effoditur, gryseі coloris est, sed ignita rubescit.

11. *Steatites* viridis, vulgo lapis nephriticus, crystallisatus: crystallis paruulis polygonis, super serpentino lapide, e *Topschau* Vngar. superior.

12. *Argilla pura* vel terra aluminaris natiua e Lombardia. In globulos concreta ad Halam Saxoniae occurrit; dubium vero est an ibi re ipsa natiua sit, nec ne.

13. *Smaragdus* peruvianus in vena spatoso-calcarea schisti argilla-

gillacei nygri, criſtallis columnaribus hexaëdris, angulis truncatis, i. e. dodecaëdris: planis alternim largioribus. In *Muſeo Pragenſi.* Vidi quoque Smaragdos criſtalliſatos hexaedros in ſimili ſchiſto et ſpato calcareo e *Mexico*, in *Muſeo Dresdenſi.* D. Bogdanoff ante aliquot annos Smaragdos cryſtalliſatos e deſerto *Kirgisenſi* Petropolin attulit. (*)

14. *Schoerlus albus* columnaris craſſitie pollicis, ex Orauitza Bannatus. Cultro tritus in tenebris phosphoreſcit. In minera cupri pyritacea occurrit.

15. *Schoerlus ruber* ad Elbbrunn prope montem Gigantum (Rieſengebirg) Sileſiae.

—— —— —— craſſitie pollicis columnaris in quartſo e *Rewutza* in territorio Comitis Cohari, prope Leitſchau in Vngar. ſuper.

16. *Schoerlus niger* columnaris, cuius columna vnica ponderis eſt librae et 10 lothonum, e *Saar* in Morauia. Huius magnitudinis vere giganteae Schoerli cryſtallum antea nunquam vidi.

17. *Schoerlus niger* columnaris, cui impreſſi ſunt granati criſtallini. Dum euelluntur veſtigia polygoni corporis diſtincte expreſſa in ſchoerlo manent.

18. *Hornblende* columnaris inſtar Schoerli, in Saxo: Murkna, e Zillerthal Tyrol.

19. *Zeolithus ruber* radiatus, colore pſeudogalenae rubrae, in lapide vel calcareo vel ſchiſtoſo-argillaceo, ex *Tranſyluania.*

20. *Zeolithus ruber lamellis hexagonis* criſtalliſatus in Laua montis *Kratſchiuneſt* prope Salatnam Tranſyluaniae. In Amyg-

(*) Colore et facie quidem ſmaragdis ſimiles cryſtallos e ſuperiore Irtis fl. regione aliquoties acceptas vidimus; ſed erant durioris fluoris ſpecies in cryſtallos priſmaticas efficta, nec ad chalybem ſcintillans.

mygdaloide ad eundem locum obuio etiam reperitur. Albi quoque coloris eſt.

21. *Mica* ſiue Talcum lamellis longis planis ſibi inuicem incumbentibus, colore argenteo et coeruleo. Alia varietas colore argenteo et viridi gaudet. E montibus *Carpathicis*, qui Tranſyluaniam et Walachiam ſeparant.

Varietas coerulea in Tyroli, Auſtria et, vt fertur, in monte Gotthardo Heluetiae quoque reperitur. Pro ſchoerlo coeruleo venditatur.

22. *Talcum virideſcens*, forma granati, nec non forma Schoerli criſtallinum. Dum finditur intus quoque Talcum eſt, nec in ſuperficie tantum, vt Criſtalli ſic dictae ſahlunenſes.

23. *Quartſum* pumicis inſtar *poroſum* et aquae innatans. Montes efficit in territorio neoſolienſi.

24. *Quartſum* amorphum *coerulei coloris*, e Weitſch Stiriae.

25. *Quartſum* pingue *roſei coloris* ad *Rabenſtein* in ſylua Frauenau dicta, prope Zwiſel in Bauaria.

26. *Quartſum lactei coloris figura rhomboidali.* Huius forma admodum particularis eſt. Lamellae chartae ſubtiliſſimae craſſitie rhomboiden formant intus cauam. Intra maiorem minor exiſtit priore occulta, parietibus diſtantibus. Luſum naturae dicas, ſi vis; ſed quo modo formatus? In muſeo caeſar. vienenſi occurrit, *Cremnitzio* oriundum.

27. *Quartſi Criſtalli* hexagonae quidem, vt eſſe ſolent, ſed curuae aut inflexae, ex *Delphinatu*, prouincia Galliae.

28. *Calcedonius* criſtalliſatus: pyramide hexangulari ex Hüttenbergenſibus ferri fodinis Carinthiae.

29. *Calcedonius hexaëdro-priſmaticus*: *apice pyramidali* e fodinis Thereſiae et Maximiliani prope Schemnitzium.

30. *Calcedonius radiatus* concentricus, Zeolithi inſtar cryſtalliſatus.

—— —— —— *filiformis*, *tubuloſus*, et *aceroſus*, ex iisdem fodinis.

31. *Calcedonius coerulei coloris* vel *amorphus*, vel *cubicus*, vel *rhomboidalis*. Omnes varietates ad *Trceſtian* prope Kapnik Tranſyluaniae occurrunt; prima autem inſuper ad *Torotsko* Tranſyluaniae, in fodina ferri.

32. *Calcedonius coerulei coloris opalizans*, in lapide ſic dicto piceo flauo ad *Zahm* et *Arat* in Vngaria ſuper. verſus limites Tranſyluania.

33. *Opalus* et *Lapis mutabilis* e *Radomiſchel* in Polonia. Opali iſti colorum elegantia et variatione illos aemulantur, qui ad Peklin in Vngaria ſuper. effodiuntur.

34. *Lapis mutabilis* (Weltauge) in lapide piceo ad Peklin Vngar. ſup. Maculas format in hoc lapide, quae aqua humectatae euaneſcunt.

35. *Lapis mutabilis* qui calore redditur diaphanus. Eſt lignum quoad partem petrefactum et lapide piceo albo imbutum, aeris iniuriis diu expoſitum, haud procul Cremnitzio reperiundum.

36. *Lapis piceus* (germanice Pechſtein) colore *viridi* e montibus *carpathicis*.

—— —— —— colore obſcure *flauo* ad *Iacobian*, vbi ferro fundendo fluoris inſtar additur.

—— —— —— *flauo* et *brunneo* ex inſula Elba maris tyrrheni.

—— —— —— *flauo* et *rubro* ad *Mungatſch* in Vngar. ſup. Flavus 36 libras ferri in centenario continet.

36. *Lapis piceus rubro* ad *Hermannſtadt* Tranſyluaniae.

—— —— —— *coeruleo* ad *Nagyag* Tranſylu. Teſte D. Fichtel libras quatuor plumbi in Centenario continet.

—— —— —— *flauo* et *rubro* ad Zahm et Arat in Vngaria in confinio Tranſyluaniae.

—— —— —— *roſeo* vel carneo ad *Peklin* prope Caſchauiam Vngar.

—— —— —— *luteo* in agris prope *Engelſchauſen* in Bohemia.

—— —— —— *omnium fere colorum* ad *Telkobanyam* in Vngaria ſuperiore, in ſaxi metalliferi varietate porphyrea: nigra vel rubra, magna copia reperitur.

37. *Aurum natiuum* in gypſo ſpatoſo l. ſelenitide e Trzeſtian in Tranſyluania.

38. *Auri minera Nagyagenſis* reticulata (geſtrickt).

39. *Argentum natiuum columnare*: columnis hexaëdris compreſſis, ſeu planis duobus oppoſitis largioribus, angularibus anguſtioribus ⟨⟩ e fodinis *Fürſtenbergenſibus*. In muſeo Pragenſi.

40. *Argentum* cum ferro, arſenico et antimonio, ſulphure *larvatum*, vulgo Federerz, colore perfecte griſeo; e Felſöbania in muſeo D. Stütz Vienae.

41. Argentum acido ſalis laruatum ex Peru, e Delphinatu, e Windiſch Leithen Schemnizii et e fano mariae Alſatiae.

42. *Argentum molybdaeno et ferro* adunatum tenues lamellas format, quibus ſuper, charta ſcribi poteſt. Locus: *Deutſch Pilſen* in Vngaria: noua forſan ſpecies.

43. *Hydrargyrum* argento adunatum, *Amalgama naturale*, in Palatinatu interdum occurrit; nuper autem in fodina Andreae prope Zlanam in Comitatu Gomorienſi Vngariae repertum eſt.

44. *Hydrargyrum ſulphure adunatum*, forma tantum cinnabarina hucusque in fodinis ſeſe prodiit; in fodina *Heibuſch* autem prope *Kirchheim* Naſſauiae forma pulueris nigri, qui, dum arte paratur, *Aethiops mineralis* audire ſolet, occurrit, teſtante Lithophylacio lib. Bar. de Raknitz, Dresdae.

45. *Plumbum* ochraceum ſ. Calx plumbi natiua, gryſea e *Bannatu.*

46. *Plumbum ſulphure mineraliſatum* ſeu galena plumbi cryſtallis vtrinque pyramidalibus, absque columna, e fodinis *Bleibergenſibus* Carinthiae.

47. *Plumbum ſulphure min.* ſ. *galena* plumbi *octoëdra* ex eodem loco.

48. *Plumbum ſulphure min.* ſ. galena *cubica* quidem, angulis vero obliteratis rotundatis, quaſi igne fuſa, guttulis propendentibus; e *Radiborzitz* Bohemiae.

49. *Plumbum acido aut aëreo aut phoſphorico mineraliſatum*, vulgo: plumbum ſpatoſum,

a) *amorphum* colore *aurantio* ex Risbanya Hungar. ſup.
ex Annaberg in Auſtria.
luteo: ex Risbanya
e Bleiberg Carinthiae.
caeruleo: ex Risbanya
albo: ibidem
roſeo: e fodinis plumbiferis ad Mies Bohemiae.

b) *cry-*

b) *criſtallinum cubicum lutei* ex *aurantii* colonis e Bleiberg et Risbania *polygonum* e variis iam memoratis locis.

Obſcruatio. Plumbum ſpatoſum luteum e cuniculo Mathaei ad Bleiberg in Carinthia vidi, parrulas cochleas continens ex genere Helicis Linnaei. Cochleae iſtae cum plumbo ſpathoſo nihil quidem commune habent; cum vero mons Bleiberg dictus lapide calcareo eius indolis conſtet, quem primaerum vocitare ſolent oryctographi nonnulli, praeſentia helicum aliarumue cochlearum petrefactarum hic omnino argumento eſt, illam denominationem et characterem, quo fulcitur, lubrico admodum niti fundamento. Conferantur ea, quae ſupra dicta ſunt No. 3.

50. *Plumbum acido ſalis* mineraliſatum, *Plumbum corneum*, in fodis plumbiferis ad *Mies* et *Bleiſtadt* Bohemiae nuper detectum eſt, et nouam certe ſpeciem conſtituit.

51. *Cuprum calciforme rubrum*, vulgo *flos Cupri* dictum, in tenuiſſimos capillos vel quoque ſquamas ſpatoſai efflorescens ad *Saskam* Banatus temiſcenſis iam occurrit; olim tantum e fodina Larentii freibergenſi et ex alia quadam fodina in territorio Colonienſi innotuit.

52. *Cuprum cum argilla*, *acido muriatico mineraliſatum*, Mica viridis Saxonum in mineris cupri, quas piceas et teſtaceas vocant, in Banatu temiſienſi frequens obſeruatur. Colore ſaturate viridi, pallidiore et demum luteſcente variat. Vidi quoque ex Sibiria.

53. *Ferrum arſenico adunatum*, vulgo Misſpickel, in *Röderzeche* Carinthiae ſuperioris occurrit, quod auri lothones viginti in Centenario continet.

54. *Martis minera haematitica nigra*: criſtallis pentagono-pyramidalibus, e territorio Schnebergenſi Saxoniae.

55. *Ferri minera phlogiſtica* Cronſtedti (Eiſenbrandertz) aurum et argentum ſimul continens, e cuniculo Michaelis Schemnizii, ſuper ſchiſto nigro argillaceo et galena plumbi.

56. *Aethites martialis* figura cubica e Banatu temiſienſi.

57. *Arſenicum ſulphure mineraliſatum*, rubrum et flauum nativum e Buckowina.

Idem ad Gumiſcanam in Georgia.

—— e cuniculo Ioſephi Walachorum in confinio Banatus.

58. *Cobaltum acido arſenici mineraliſatum* vulgo flos Cabalti, *colore viridi* e fodinis Cobalti ad Topſchau in Vngaria ſuperiore. Cabalti minerae variae bonae notae et magna copia iam in hac prouincia effodiuntur et ad *Klokniz* prope Schottwien, locum, qui aliquot milliaria Viena diſtat, in vitrum caeruleum l. Schmaltam convertuntur. Rarius Cobaltum in *Banatu*, inter Dognaskam et Bogſchan occurrit.

59. *Zincum cum ferro*, *ſulphure mineraliſatum* (Pſeudogalena) tunicei (Scherbenkobold) ſed minoribus, e *Raibel* Carinthiae. Cultro.

60. *Zincum cum ferro* etc. ſeu *Pſeudogalena* ſtriata in lapide calaminari e Dognaska Banatus.

61. *Zincum cum ferro* etc. vel *Pſeudogalena* criſtalliſata, *lutea*: *columnis* prismaticis hexagonis, 2 pollicum longitudine, e fodina Scharfenbergenſi Saxoniae. Pſeudogalenam columnarem antea nunquam vidi.

62. *Zin-*

62. *Zincum cum ferro* etc. vel *Pſeudogalena* cryſtallina, *colore Rubini diaphano*, nec opaco obſcuro, qualis frequens occurrit. L. fodina *Freibergenſi*, quae rubra dici ſueuit.

63. *Zincum forma metallica ſulphuratum Cronſtedti* e *Felſobanya* Vngaria ſuperioris, in nec non e fodina cupri iam relicta ad *Stepanoff* in Morauia.

64. *Zincum aëratum*, vulgo ſpatoſum aut ſpatum zincinum colore caeruleo; idem colore viridi, ad Bleiberg in Carinthia.

65. *Antimonium cum arſenico*, *ſulphure mineraliſatum*, vulgo: Antimonium *rubrum* olim tantum e fodinis Braundorfo-freibergenſibus innotuit; iam vero non ſolum Cremnitzii in ſubſtantia interiore minerae antimonii griſeae ſeſe prodit, verum etiam haud procul Presburgo, ad *Malazkam*, ſpeciminibus elegantioribus comparuit.

66. *Antimonium album* nominare liceat, donec chemice determinari poterit, mineram prorſus nouam, nouam inquam antimonii ſpeciem, in fodinis plumbiferii ad *Przibram* Bohemiae obuiam, a nullo quod ſciam, mineralogo antea deſcriptam. Conſtat vero calce antimonii alba acido vel aëreo, vel alio quodam nondum examinato, mineraliſata aut criſtalliſata. Colore eſt albo ſubargenteo nitente. Cryſtalli lamellis componuntur parallellogrammaticis, baſi cohaerentibus, ex centro-quaſi divergentibus. Inſident galena plumbi. In muſeo Pragenſi vidi poſtea calcem antimonii albam natiuam ex Felſobnya; ingne autem forſan in fodina productam, vbi ligno accenſo petram emolliunt. Vidi demum criſtallos columnares ibidem aſſeruatas ex eadem fodina Felſobanyae, plumbo ſpatoſo albo ſimiles, quae fide Clariſſimi Zauſchner antimonium continent, ideoque anti-

antimonii iam deſcripti albi varietatem conſtituunt. Dari quoque calcem antimonii natiuam colore aurantio, quam pro Kerme minerali natiua habent, in ſcriptis nonnullis legi.

67. *Magneſium calciforme induratum*, intus radiatum, quod gravitate ſpecifica tam exigua gaudet, vt aquae innatet, ex *Hüttenberg* Carinthiae.

68. *Granites* in quo quarzum caeruleum, colorem lapidis Laruli initatur, e montibus ad *Waldbach* prope Griglach in ſtiria.

69. *Porphyrius* niger vel ruber, aëre deſtructus, quaſis ad Peklin in Vngaria Opalis verſicoloribus matrix eſt, continens la pidem ſic dictum piceum et minimas cochleas heliciformes petrefactas. Eſt vero hic Porphyrius nihil aliud quam ſtratum ſecundarium e deſtructo ſaxo metallifero ortum. Ex Vngaria.

70. *Laua vitrea criſtalliſata*: dodecaëdro-pyramidata, lateribus concauis. Ad Tokay in Vngaria, vulgo Fuchsſhaphier aus Tokay. Rariora ſunt eiusmodi ſpecimina lavae vitreae criſtallinae tokayenſis, nec exacte locum inquirere potuit, vbi inueniuntur. Laua vitrea informis autem ibi ſtratum peculiare efficit in terra vulcanica tuffacea prope Toka. Eiusmodi ſtrata vel venas lauae vitreae, minus largas tamen, in collibus cinerum vulcanicorum territorii vicentini, in Italia olim obſeruaui.

71. *Laua* hinc inde *columnaris vel baſaltina*, ſchoerhur viridem columnarem et Chryſolithos continens, e monte *Jeſpenberg* dicto, psope *Reichenberg*, in circulo bunzlavienſi Bohemiae. Inueniuntur etiam Chryſolithi fruſtula maiora forma rotunda et rotatione aquarum detrita in agris ad *Moldautheim* in Bohemia.

72.

72. *Terra vulcanica indurata*, *Traſs* dicta, quae ramos vegetabiles in carbonem conuerſos includit, ex *Andernach* ad Rhenum, omne tollit dubium de origine lapidis huius molaris rhenani.

73. *Ichthyolithus* vel piſcis petrificatus in gypſo. Vidi in muſeo nobilis virginis de Raab, Vienae. De exiſtentia corporum petrefactorum in gypſo diu dubitarunt auctores mineralogi.

74. *Lignum foſſile auriferum*, colore nigro, in breccia ſilicea cuniculi Zecheriani ad Kirnik Tranſyluaniae occurrit. Centenarius huius ligni lothones 2 auri continet.

PETREFACTA IGNOTA.

Auctore
BAS. ZUTEW.

Conuent. exhib. d. 1 *Nouembr.* 1787.

Inter innumera offamenta, quae per Europam, Roſſiam ac Siberiam borealem animalium plagae mundi prorſus alienorum effodiuntur, quaeque cuilibet Naturae indagatori non minus mira viſuntur, ac ſi noſtri Rosmari, vel vrſi albi reliquiae in planis Indiae reperirentur, offero hic duo fruſta: vnum, quid ſit diuinare nequaquam potui; alterum eſt cornu animalis hucusque ignoti et forte plane vlterius non exiſtentis. Reperta ſunt ambo in minera ferri alba prope Ieniſeiskum in Siberia, vnde translata ſunt mihi primum ſub nomine piſcis petrefacti, alterum dentis Rosmari. Vtriusque exhibita breui deſcriptione figuras adiiciam, quibus luculentius pateſcat, quid ſagacioribus naturalium rerum inueſtigatoribus de iis ſit ſentiendum.

Tab. V. Fig. 1. 2. 3. Maſſa minerae ferri albae oblonga, in medio cylindrica, ſuperficie planiori, ad apicem anteriorem vtrinque depreſſa, ad poſteriorem compreſſa et adtenuata. Hanc ſi verticaliter

ter inſpicias, ſimilem ſe praebet ligoni, cuius apices vnus alteri exaduerſo compreſſi; ſi horizontaliter, refert aliquem piscem ignotum, cuius roſtrum depreſſum, medium ventricoſum, cauda vero compreſſa, elongata, adtenuata; ſi vero deſuper intuearis, tunc perfecte figuram habet linguae alicuius beſtiae groſſioris. Superficies huiusce maſſae vndiquaque laeuis, exceptis paucis locis, vbi arena quartzoſa inaequalis ſe adferruminauerit, veſtita quaſi cortice ferrugineo, in medio dorſo duplo craſſiori, quam ad apicem vtrumque aut ſubtus; malleo percuſſa corticem facile per fruſta dimittit. Interior compages perfecte ſolida, aequalis, fuſca, extrorſum parum flaueſcens, ſulcis transuerſis vt cingulis, totum corpus ambientibus, varie diſtantibus, parallelis, ſubtus retrorſum inflexis. Linea lateralis, ſi piſcem repreſentare velis, ad caudam ſolummodo viſibilis, caeterum inconſpicua, recta, vel parum flexuoſa, tendit per medium latus ad dimidium vsque corporis. Longitudo totius maſſae 1 pedis 2 pollicum 3 linearum. Latitudo ſumma in medio corporis, (nam ad caput ſenſim ſenſimque diminuitur, verſus caudam vero ſubito et inſigniter adtenuatur,) $3\frac{1}{2}$ pollicum. Altitudo in medio corporis $3\frac{1}{2}$ pollicum. Circumferentia in loco craſſiori 10 pollicum.

Tabula ſexta repraeſentat cornu animalis ignoti, quod immerito habitum eſt pro dente Trichechi Rosmari. Illud rectum eſt, ad radicem parum incuruatum, annulis aetatem animalis deſignantibus ad nouendecim conſpicuis; ab vno latere cylindricum, ab altero per totam longitudinem planum, vel ſulco lato excauatum, verſus apicem adtenuatum; ſuperficie inaequali, ſtriis ſulcisue maioribus minoribusque longitudinalibus exarata, cinerea, hic-ibi ſabulo exaſperata. Subſtantia interna compacta, ſolida, fuſca, cortice veſtita diſtincto Tab. VI. Fig. 1. 2.

concolori, qui, non plus quam vnius lineae craſſitiei, malleo percuſſus facile decidit fruſtatim. Longitudo 1 ped. 2 poll. Circumferentia in medio ½ pedis.

Nota. Reperta ſunt haecce foſſilia in minera ferri alba, quae ſingularem habet proprietatem, vt ego ipſe expertus ſum, in libero aere diutius iacendo magis et magis nigrescendi, hinc non eſt cur miremur, foſſilia haec ſolo ſuo natali exemta colorem fuſcum induiſſe.

DIAN-

DIANTHI NOVI HYBRIDI.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Conuent. exhib. d. 3 Decembr. 1787.

EXP. I.

Dianth. *plumar. Sibir.* *) ♀.
Dianth. *barbatus*, ♂.
Fl. ſatur. carmeſ.
Vid. Exp. inuerſ. II.
Anno 1764. d. 8 Iun. Flor. 4.
it. Anno 1768. d. 27 Aug. Flos 1.

Deſcriptio.

Plantae anno 1765, 1767 et 1769 ex hac copula enatae plurimae, in vniuerſum omnes eiusdem inter ſe habitus ac formae: praeterquam quod earum nonnullae caulibus paullo altioribus eſſent inſtructae, quam caeterae, floresque aliarum colore prae aliis pallidiore notati. Compoſitis prius denſis foliorum faſciculis, florebant omnes anno inſequenti ab initio Maii vsque ad Iunii medium. Folia quaſi graminea, coloris obſcure nec viuide virentis, ſpiſſiorisque ſubſtantiae; longiſſima eorum $4\frac{1}{2}$ poll. pariſ. aequabant, ac circa maximam ipſorum latitudinem $2\frac{1}{4}$ lin. lata erant: comparatione itaque

*) Vid. Dritte Fortſ. der vorläuf. Nachr. u. ſ. w. S. 89.

facta, prae iis ♀, intenſius quidem, ſed minus ſplendide virentia, longiora, multoque latiora; prae iis ♂ autem non adeo ſplendide virentia, longa, rigidiuscula, multoque anguſtiora.

Caules ſatis erecti ac rigidi, eiusdemque cum foliis coloris: attamen altiores, craſſiores, rigidiores ac erecti magis, quam ♀; aſt humiliores, graciliores, flexibiliores, nec adeo recti, quam ♂. Faſciculi florum notabiliter denſiores, copioſiores, ſibique inuicem viciniores, quam ♀; ſed multo laxiores, inordinati, magisque diſſiti a ſe inuicem, quam ♂.

Squamulae calycis non quidem ita obtuſae ac breues, quam ♀, ſed quoque non adeo longae, ſetisque minus conſpicuis terminatae, quam ♂. Calyx ipſe paullo breuior, minus cylindraceus, inque ſegmenta anguſtiora diuiſus, quam in ♀; aſt paullo longior, minus ventricoſus, oreque latioribus nec ita acutis dentibus inſtructo, quam ♂. Color florum plus minusue pallide carmeſinus, non ſine omni venularum profundius tinctarum veſtigio, punctulisque albicantibus obiter tantum ſuperſperſus.

Flores ipſi minores, minusque fimbriati, quam ♀; aſt maiores, nec limbo, vt in ♂, ſimpliciter crenati, ſed, more ♀, ſatis profunde inciſi. Limbus petalorum minus oblongus quidem, quam in ♀, nec tamen ita ſubrotundus, ac in ♂. Puluis antherarum, qui in ♀ albus, in ♂ vero e coeruleſcenti viridis eſt, e cinereo albicans, pluribusque effoetis ac vacuis, quam bonis particulis conſtabat. Stamina omnium horum florum ſemper vna cum ſtigmatibus in conſpectum prodibant. Capſulae foecundatae nec ita cylindraceae, quam ♀, neque adeo ventricoſae, quam ♂; earundemque longitudo ac craſſities inter ♀ et ♂ media. Plurimae earum vacuae penitus, pau-

pauciores uno alteroue ſemine nigro, ad adſpectum bono foetae, cuius impraegnationis cauſa ſine dubio in parentibus, in vicinia earum collocatis, quaerenda fuiſſet.

EXP. II.

Dianth. *barbatus*, ♀.
Dianth. *plumar. Sibir.* ♂.
Anno 1772. d. 4 Iun. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. 1.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1773 inde procreatae plures, anno ſequenti demum floruere: ab iis Exper. inuerſi haud multum diſcrepantes.

EXP. III.

Dianth. *deltoid.* ♀.
Dianth. *Armer.* ♂.
Anno 1765. d. 16 Iun. Flor. 2.

Deſcriptio.

Prouentus ſeminum ex hac copula ſatis copioſus. Plantae ann. 1766, 1767 et 1768 inde prognatae plures, mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis. Capſulae harum ſponte natae ſemina pauca bona continebant.

EXP. IV.

Dianth. *barbat.* ♀.
Dianth. *Armer.* ♂.
Anno 1765. d. 22 Iun. Flor. plur.

Deſcrip-

Descriptio.

Plantae anno 1766 et 1767 inde enatae paucae, mediam inter ♀ et ♂ similitudinem monstrabant.

EXP. V.

Dianth. *plumar. Sibir.* ♀.
Dianth. *superb.* ♂.
Anno 1772. d. 17. Aug. Flor. 2.

Descriptio.

Plantae anno 1773 inde prognatae plures, partim iam mense Septembr. partim vere anni sequentis demum floruere: mediae inter vtrumque parentem similitudinis ac formae.

EXP. VI.

Dianth. *hortens.* ♀.
Fl. pallid. cinnabar.
Dianth. *plumar. Sibir.* ♂.
Anno 1772. d. 5. Iul. Flor. 5.

Descriptio.

Plantae anno 1773 ex hac copula productae plurimae, anno insequenti demum floruerunt, mediamque inter ♀ et ♂ proportionem ac formam per omnia tenuêre.

EXP. VII.

Dianth. *hortens.* ♀.
Varior. color.
Dianth. *ferrug.* ♂.
Anno 1773. d. 21. Iul. Flor. 11.
Vid. Exp. inuers. VIII.

De-

Deſcriptio.

Plantae anno 1774. ex hac copula enatae plures; in vniuerſum omnes inter ♀ et ♂ mediae ſimilitudinis ac formae. Floruit earum vna iam Auguſto menſe: Floribus boli Armenae colorem referentibus; caeterae omnes altero demum anno floreſcentiam ſuam peragebant.

EXP. VIII.

Dianth. *ferrug.* ♀.
Dianth. *hortenſ.* ♂.
Varior. color.
Anno 1773. d. 13. Iul. Flor. 6.
Vid. Exp. inuerſ. VII.

Deſcriptio.

Plantae anno 1774. inde prognatae plures, iis Exper. inuerſi in vniuerſum ſatis ſimiles. Earum nonnullae floribus plenis, pallide rubicundis ornatae.

EXP. IX.

Dianth. *ſuperb.* ♀.
Dianth. *ferrug.* ♂.
Anno 1773. d. 23. Iul. Flor. 15.

Deſcriptio.

Plantae anno 1774. inde procreatae plurimae, mediam inter vtrumque parentem tenebant proportionem, ac, vti priores Exp. VII. et VIII. veſtigia flaui coloris, qui ferrugineo proprius eſt, ſatis manifeſta monſtrabant.

EXP. X.

Dianth. *ſuperb.* ♀.
Dianth. *chinenſ.* ♂.
Anno 1764. d. 25 et 28. Iul. Flor. 6.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1765 et 1768. inde prognatae plurimae, in vniuerſum ab iis Exp. inuerſi (*a*) haud abludebant.

EXP. XI.

Dianth. *ſuperbus* ♀.
Dianth. *barbatus* ♂.
Anno 1764. d. 23. Iul. Flos 1.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1765. ex hac copula enatae plures, mediam inter vtrumque parentem prae ſe ferebant faciem. Flores earum pallide carmeſini, punctis obſoletis albicantibus adſperſi. Maculae pallide virentes, pilorumque puniceorum non pauci ad regionem ſolitam. Capſulae harum plantarum ſponte natae vt plurimum vacuae, pauciſſimae ſemine vno alteroue nigro qualitatis dubiae foctae.

EXP. XII.

Dianth. *ſuperbus* ♀.
Dianth. *carthuſianor.* ♂.
Anno 1764. d. 29. Iul. et d. 17. Sept. Flor. 9.

De-

(*a*) Vid. Dritte Fortſ. der vorläuf. Nachr. u. ſ. w. S. 69. §. 40. XLI. Verſuch.

Deſcriptio.

Copula haec parcam tantummodo ſeminum foecundorum copiam mihi ſuppeditabat, e quibus anno inſequenti enatae ſunt plantae duae, mediae inter ♀ et ♂ conformationis, ac valde luxuriantes. Vtraque floruit anno 1766. menſe Iunio ac Iulio. Flores earum pallide carmeſini. Macula pallide viridis, cum ſtriis tribus rubicundis, ad regionem ſolitam, piliſque ſat longis puniceis obſita. Limbus petalorum profunde inciſus. Puluis antherarum coloris incani, particulis maxima ex parte bonis conſtans.

EXP. XIII.

Dianth. *chinenſis* ♀.
Dianth. *pungens.* ♂.
Anno 1773. d. 5. Aug. Flor. 3.
It. Anno 1774. d. 23. Aug. Flor. 4.

Deſcriptio.

Plantae anno 1774 et ſeq. inde prognatae plurimae: mediae inter ♀ et ♂ ſimilitudinis ac formae.

EXP. XIV.

Dianth. *ſuperbus* ♀.
Dianth. *pungens.* ♂.
Anno 1773. d. 23. Iul. Flor. 8.

Deſcriptio.

Plantae anno 1774 inde procreatae plurimae, mediam inter vtrumque parentem, vti aſſolent hybridae primigeniae, ſimilitudinem exhibebant. Flores earum tam magnitudine in vniuerſum, quam longitudine fimbriarum corollae illis ex barb. ♀.

♀. et ſuperb. ♂. prognatis ſimillimi. Color albicans, in rubicundum inclinans vtplurimum. Circa baſin limbi corollae maculae viridiusculae, cum pilis rarioribus, puniceis. Puluis antherarum griſeus.

EXP. XV.

Dianth. *hortenſis* ♀.
Dianth. *pungens.* ♂.
Anno 1773. d. 23. Iul. Flor. 3.

Deſcriptio.

Plantae anno 1774 ex hac copula prognatae perpaucae, ſequenti demum floruere. Flores earum ex rubro et albo ſtriati, ac in ſummo gradu ſteriles.

VARIETAS HYBRIDA.

EXP. XVI.

Dianth. *glaucus* ♀.
Dianth. *deltoides* ♂.
Anno 1765. d. 11. Iun. Flor. 8.

Deſcriptio.

Plantae anno 1766. inde procreatae plures, ac inſequenti florentes, in ſummo gradu foecundae erant; itaque vna pro mera alterius varietate naturali habenda.

SOREX CAECVTIENS.

Auctore

E. LAXMANN.

Conuent. exhib. die 12 *Maii* 1785.

Pondus - - - - drachm. I. gr. V.
Longitudo tota poll. Lond. - III. - lin. IX. ß.
—— capitis ad nucham - - - - - IX.
—— roſtri - - - - - - - - III.
—— a naſo ad ortum caudae - II. - - V.
—— caudae - - - - I. - - IV. ß.
—— Brachiorum - - - - - - - III. ß.
—— palmae - - - - - - - II. ¼.
—— tibiarum - - - - - - - VI. —
—— plantae - - - - - - - - V.
Circumferentia capitis maxima - - I. - - I.

Corpus *Sorice minuto* paulo groſſius et hirſutius.

Naſus roſtratus, ſupra hirſutie fuscus, infra pallidus. Dentes fusco rubentes, nitidiſſimi, obtuſiuſculi, rotundati.

Myſtaces copioſi, rigidiuſculi, mediocres.

Oculi minimi, vellere plane abſconditi, nec niſi detracta cute conſpicui, ſemine papaueris longe minores, ſinui oris proximi, caecutienti animalculo vix non fruſtranei.

Auriculae nullae, pori auditorii maiuſculi, ſurſum directi, in vellere deliteſcentes, collo proximi.

Collum breuiſſimum.

Corpus teretiuſculum; artus tenues, pedes pentadactyli, gryſei, vnguibus concoloribus.

Cauda longitudine fere trunci, tenuis, murina, ſupra fuſca, ſubtus gryſea.

Color velleris ſupra fuſcus, pilis denſiſſimis, ſubtus ab ore ad caudam caeruleſcenti-canus.

Habitat in Sibiria ad lacum Baikal.

ASTRONOMICA.

ÉCLAIRCISSEMENS

SUR

LE MÉMOIRE DE Mr. DE LA GRANGE,

INSÉRÉ DANS LE Ve. VOLUME DE MÉLANGES DE TURIN, CONCERNANT LA MÉTHODE DE PRENDRE LE MILIEU ENTRE LES RÉSULTATS DE PLUSIEURS OBSERVATIONS, &c.

Par

M. *L. EULER.*

Préſenté à l'Académie le 27 Nov. 1777.

Qu'on concoive un Quart-de-cercle tel que, lorsqu'on s'en ſert pour obſerver, par exemple, la hauteur du Pole, après avoir fait un grand nombre de telles obſervations il ſe trouve a obſervations qui donnent cette hauteur exacte, b obſervations qui la donnent d'une minute trop grande, et enfin c obſervations qui la donnent trop petite d'une minute; deſorte que le nombre de toutes ces obſervations ſoit $N = a + b + c$, parmi leſquelles il y en ait a où l'erreur eſt $= +1$ & c où l'erreur eſt $= -1$.

Un tel Quart-de-cercle étant ſuppoſé, quand on aura fait n obſervations pour déterminer l'élevation du pole, la declinaiſon d'une étoile, ou quoi que ce ſoit, parmi leſquelles on

aura pris un milieu, ſelon la manière ordinaire, en ajoutant tous les réſultats enſemble & diviſant la ſomme par le nombre des obſervations n; on demande: quelle ſera la probabilite, que ce milieu donne exactement la vraye hauteur cherchée, ou que la ſomme de tous les réſultats donne exactement zero? & enſuite: quelle ſera la probabilité que la ſomme de tous les reſultats devienne ou $+1$, ou -1, ou $+2$, ou -2, ou $+3$, ou -3; &c.?

Pour repandre plus de lumière ſur cette queſtion, on n'a qu'à concevoir pluſieurs billets dont le nombre ſoit $N = a + b + c$ & qui ſoyent marqués a par 0, b par $+1$ & c par -1. Que de ces billets renfermés dans une boite, on tire, au hazard, ſucceſſivement n billets, en remettant chaque fois le billet tiré dans la boite, & l'on pourra demander: quelle ſera la probabilité, que la ſomme de tous les nombres tirés ſucceſſivement ſoit ou 0, ou $+1$, ou -1, ou $+2$, ou -2, &c. où il eſt d'abord clair que cette ſomme ne ſçauroit jamais ſupaſſer ou $+n$, ou $-n$. De cette manière la queſtion propoſée pourra aiſement être réſolue par la Théorie des Combinaiſons, en ſuppoſant d'abord $n = 1$, enſuite $n = 2$, $n = 3$, &c.

Soit donc $n = 1$, ou qu'on ne tire de la boite qu'un ſeul billet, & il eſt évident, qu'il y aura a cas où le nombre tiré peut être 0, b cas où il peut être $+1$ & c cas où il peut être -1; donc puisque le nombre de tous les cas eſt $a + b + c = N$, la probabilité que le nombre tiré ſoit 0 ſera $\frac{a}{N}$, la probabilité qu'il ſoit $+1$ ſera $\frac{b}{N}$ & celle enfin qu'il ſoit -1 ſera $\frac{c}{N}$, & puisqu'ici on ne tire qu'un ſeul billet il n'y a pas de milieu à prendre.

Soit

Soit $n = 2$, ou qu'on tire de la boite deux billets ſucceſſivement, & quel que ſoit le nombre du premier, le ſecond pourra être celui de chaque billet dans la boite, en ſorte que chaque billet tiré d'abord admet N variations, d'où l'on voit que le nombre de tous les cas poſſibles ſera $N^2 = (a+b+c)^2$. Or cette formule étant développée donne $aa + bb + cc + 2(ab + ac + bc)$, dont le premier terme aa exprime le nombre des cas où les deux billets tirés ſont $0 + 0$ & la probabilité de ce cas ſera $\frac{aa}{N^2}$. Enſuite le ſecond terme bb marque le nombre des cas où les deux billets tirés ſeront $+1 + 1 = +2$, dont la probabilité ſera $\frac{bb}{N^2}$. Le troiſième terme cc marque le nombre des cas où les nombres des billets tirés ſeront $-1 - 1 = -2$, dont la probabilité $= \frac{cc}{N^2}$. De la même manière le quatrième terme $2ab$ exprime le nombre des cas, où l'un des nombres tirés eſt 0 & l'autre $+1$ & partant leur ſomme $= +1$, dont la probabilité $= \frac{2ab}{N^2}$. Le terme $2ac$ eſt le nombre des cas où il arrive que les nombres des deux billets tirés ſont 0 & -1, & partant la ſomme $= -1$, dont la probabilité $= \frac{2ac}{N^2}$. Enfin le dernier terme marque le nombre des cas où ces nombres tirés ſont $+1$ & -1, leur ſomme partant $= 0$, & la probabilité en eſt $\frac{2bc}{N^2}$.

Puiſque ici nous avons deux billets, la ſomme des deux nombres tirés dans chaque cas étant diviſée par 2, donne le milieu dont nous avons parlé ci-deſſus, & partant la probabilité que ce milieu ſoit $= 0$, ſera $\frac{aa + 2bc}{N^2}$. Que ce milieu ſoit $+1$, la probabilité ſera $\frac{bb}{N^2}$; qu'il ſoit -1, elle ſera $\frac{cc}{N^2}$. Or il peut auſſi arriver que ce milieu ſoit $+\frac{1}{2}$ & la probabilité de ce cas ſera $\frac{2ab}{N^2}$; & enfin pour le milieu $-\frac{1}{2}$ la probabilité eſt $\frac{2ac}{N^2}$.

Suppoſons maintenant $n = 3$, & puisque chacun des cas précédens, dont le nombre étoit N^2, peut être ſuivi de chacun des N billets, le nombre de tous les cas poſſibles ſera $N^3 = (a+b+c)^3$, dont nous devons conſidérer tous les termes qui reſultent du développement de cette formule, & chacun exprimera le nombre des cas qui produiſent les trois nombres tirés, dont on aura par conſéquent tant la ſomme que le milieu, en la diviſant par trois, auquel il ſera aiſé d'ajouter la probabilité, qui ſe trouve en diviſant chaque terme par le nombre de tous les cas poſſibles, c'eſt à dire par N^3. Nous repréſenterons tous les cas dans la table ſuivante:

Termes.	Nombres.	Somme	Milieu.	Probabilité.
a^3	$0+0+0$	0	0	$\frac{a^3}{N^3}$
b^3	$1+1+1$	3	1	$\frac{b^3}{N^3}$
c^3	$-1-1-1$	-3	-1	$\frac{c^3}{N^3}$
$3aab$	$0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3aab}{N^3}$
$3aac$	$0+0-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3aac}{N^3}$
$3abb$	$0+1+1$	$+2$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{3abb}{N^3}$
$3acc$	$0-1-1$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3acc}{N^3}$
$6abc$	$0+1-1$	0	0	$\frac{6abc}{N^3}$
$3bbc$	$+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3bbc}{N^3}$
$3bcc$	$+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3bcc}{N^3}$

On voit de cette table que le milieu $= 0$ s'y rencontre deux fois, la probabilité en ſera par conſéquent $= \frac{a^3+6abc}{N^3}$. Enſuite elle montre que le milieu $\frac{1}{3}$ ſe rencontre deux fois, & partant la probabilité ſera $\frac{3aab+3bbc}{N^3}$. Or que ce milieu devienne $-\frac{1}{3}$ la probabilité ſera $\frac{3aac+3bcc}{N^3}$. La probabilité pour le milieu $+\frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3}$ ſera $\frac{3abb}{N^3}$; pour $-\frac{2}{3}$ elle ſera $\frac{3acc}{N^3}$. Pour que le milieu devienne $+1$ la probabilité eſt $\frac{b^3}{N^3}$ & pour qu'il ſoit -1 il y aura la probabilité $\frac{c^3}{3}$.

De la même manière parcourons le cas où $n = 4$, & où par conſéquent on tire quatre billets, & il eſt clair que le nombre de tous les cas poſſibles ſera $N^4 = (a+b+c)^4$. Developpant donc cette formule, on verra aiſément tant ces quatre nombres tirés, répondans à chaque nombre, que leur ſomme & leur milieu, qui avec la probabilité ſeront repréſentés dans la table ſuivante:

Termes	Nombres	Somme	Milieu	Probabilité
a^4	+0+0+0+0	0	0	$\frac{a^4}{N^4}$
$4a^3b$	+0+0+0+1	+1	$+\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3b}{N^4}$
$4a^3c$	+0+0+0−1	−1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3c}{N^4}$
$6aabb$	+0+0+1+1	+2	$+\frac{1}{2}$	$\frac{6aabb}{N^4}$
$6aacc$	+0+0−1−1	−2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6aacc}{N^4}$
$12aabc$	+0+0+1−1	0	0	$\frac{12aabc}{N^4}$
$4ab^3$	+0+1+1+1	+3	$+\frac{3}{4}$	$\frac{4ab^3}{N^4}$
$12abbc$	+0+1+1−1	+1	$+\frac{1}{4}$	$\frac{12abbc}{N^4}$
$12abcc$	+0+1−1−1	−1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{12abcc}{N^4}$
$4ac^3$	+0−1−1−1	−3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4ac^3}{N^4}$
b^4	+1+1+1+1	+4	+1	$\frac{b^4}{N^4}$
$4b^3c$	+1+1+1−1	+2	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4b^3c}{N^4}$
$6bbcc$	+1+1−1−1	0	0	$\frac{6bbcc}{N^4}$
$4bc^3$	+1−1−1−1	−2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4bc^3}{N^4}$
c^4	−1−1−1−1	−4	−1	$\frac{c^4}{N^4}$

Dans cette table en trouve 9 milieux différens dont quelques uns ſe rencontrent deux & même trois fois. Nous marquerons donc dans la table ſuivante pour chacun de ces milieux la probabilité qui lui répond:

Milieu	Probabilité.
$0 \quad - \quad - \quad -$	$\frac{a^4 + 12\,a\,a\,b\,c + 6\,b\,b\,c\,c}{N^4}$
$+\frac{1}{4} \quad - \quad - \quad -$	$\frac{4\,a^3\,b + 12\,a\,b\,b\,c}{N^4}$
$-\frac{1}{4} \quad - \quad - \quad -$	$\frac{4\,a^3\,c + 12\,a\,b\,c\,c}{N^4}$
$+\frac{1}{2} \quad - \quad - \quad -$	$\frac{6\,a\,a\,b\,b + 4\,b^3\,c}{N^4}$
$-\frac{1}{2} \quad - \quad - \quad -$	$\frac{6\,a\,a\,c\,c + 4\,b\,c^3}{N^4}$
$+\frac{3}{4} \quad - \quad - \quad -$	$\frac{4\,a\,b^3}{N^4}$
$-\frac{3}{4} \quad - \quad - \quad -$	$\frac{4\,a\,c^3}{N^4}$
$+1 \quad - \quad - \quad -$	$\frac{b^4}{N^4}$
$-1 \quad - \quad - \quad -$	$\frac{c^4}{N^4}$.

La conſidération de ces quatre cas nous ouvre la route à la queſtion générale, où le nombre des billets tirés eſt $= n$; car d'abord il eſt évident que le nombre de tous les cas poſſibles eſt ici $N^n = (a + b + c)^n$, dont le développement n'a aucune difficulté. Mais pour nous diſpenſer de la conſidération de chacun des termes qui en réſultent, nous conſidérons ici la forme générale de chacun de ces termes, qui ſoit $M\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma$, où la ſomme des expoſans $\alpha + \beta + \gamma$ doit être $= n$ et pour trouver le coéfficient M de ce terme, la Théorie des Combinaiſons nous fournit cette formule:

$$M = \frac{1.2.3.4.\ldots\ldots n}{1.2.\ldots\alpha.1.2.\ldots\beta.1.2.\ldots\gamma}.$$

Or les nombres tirés qui répondent à ce terme ſeront $0.\alpha + 1.$

$+1.\beta-1.\gamma$ & partant le milieu de ces nombres tirés ſera $\frac{\beta-\gamma}{n}$, auquel répond la probabilité $\frac{M\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}}{N^{n}}$.

Puiſque la ſomme de tous les nombres tirés qui repondent à ce terme eſt $0.\alpha+1.\beta-1.\gamma$, on voit que ſi nous écrivions au lieu des lettes a, b, c ces formules: $a\,x^{0}$, $b\,x^{+1}$, $c\,x^{-1}$, le terme que nous conſidérons prendroit cette forme: $M\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\,x^{\beta-\gamma}$, de ſorte que l'expoſant de x nous donneroit d'abord la ſomme de tous les nombres tirés. Pour cet effet on n'a qu'à développer cette puiſſance: $(a\,x^{0}+b\,x^{1}+c\,x^{-1})^{n}$, & chacun de ſes termes, qui aura, comme nous venons de voir, la forme $M\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\,x^{\beta-\gamma}$, nous donne pour le milieu $\frac{\beta-\gamma}{n}$, et la probabilité ſera $\frac{M\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}}{N^{n}}$.

Or on comprend aiſément que ce même milieu $\frac{\beta-\gamma}{n}$ peut réſulter de pluſieurs termes différens, d'où par conſéquent il faudra tirer la probabilité qui repond à chacun, & la ſomme de toutes ces probabilités donnera la probabilité pour le même milieu $\frac{\beta-\gamma}{n}$. Pour trouver tous les termes affectés de la même puiſſance de x, je tâcherai de donner une méthode qui nous diſpenſera de ramaſſer tour ces termes par le développement actuel; mais auparavant je parcourrai ſucceſſivement les cas où l'expoſant de x devient où 0 ou ± 1, ou ± 2, ± 3. Et d'abord pour le premier, où le milieu eſt $=0$, il faudra mettre $\beta=\gamma$, deſorte que les termes ſuivans, qui produiſent ce même milieu, feront a^{n}, $a^{n-2}\,b\,c$, $a^{n-4}\,b^{2}\,c^{2}$, $a^{n-6}\,b^{3}\,c^{3}$, $a^{n-8}\,b^{4}\,c^{4}$, qu'il faut continuer jusqu'à ce que les expoſans de a deviendront négatifs, & de ce que nous avons obſervé il ſera facile d'aſſigner à chacun de ces termes ſon

coëf-

coëfficient; par conſéquent la ſomme de tous ces termes diviſée par N^n donne la probabilité entière pour que ce milieu ait lieu.

De la même manière, pour que le milieu en queſtion devienne $\frac{1}{n}$, où l'expoſant de x, ſçavoir $\beta - \gamma$, devient $= 1$; tous les termes qui y conduiſent, à cauſe de $\beta = \gamma + 1$ & $\alpha = n - 2\gamma - 1$, ſeront exprimés par les formules ſuivantes: $a^{n-1} b$, $a^{n-3} b^2 c^1$, $a^{n-5} b^3 c^2$, $a^{n-7} b^4 c^3$, &c. dont la ſomme, après y avoir joint leurs coëfficiens, diviſée par N^n donne la probabilité pour ce milieu $\frac{1}{n}$. De même pour que le milieu devienne $-\frac{1}{n}$, & partant $\beta - \gamma = -1$, on aura $\gamma = \beta + 1$ & $\alpha = n - 2\beta - 1$, d'où les termes qui produiſent ce milieu ſeront: $a^{n-1} c$, $a^{n-3} b c^2$, $a^{n-5} b^2 c^3$, $a^{n-7} b^3 c^4$, $a^{n-9} b^5 c^4$, &c.

Si l'on veut que le milieu ſe trouve $= +\frac{2}{n}$, ou qu'il ſoit $\beta - \gamma = 2$, et partant $\beta = \gamma + 2$ & $\alpha = n - 2\gamma - 2$, tous les termes qui produiſent ce milieu ſeront $a^{n-2} b^2$, $a^{n-4} b^3 c$, $a^{n-6} b^4 c^2$, $a^{n-8} b^5 c^3$, $a^{n-10} b^6 c^4$, &c. Or pour que le milieu ſoit $-\frac{2}{n}$, les termes qui le produiſent, à cauſe de $\beta - \gamma = -2$ & partant $\alpha = n - 2\beta - 2$, ſeront $a^{n-2} c^2$, $a^{n-4} b c^3$, $a^{n-6} b^2 c^4$, $a^{n-8} b^3 c^5$, $a^{n-10} b^4 c^6$, &c. où l'on doit continuer ces formules tant que l'expoſant de a demeure poſitif; & il eſt très-facile de continuer cette opération pour tous le milieux différens qui peuvent avoir lieu.

Maintenant il ſera très-aiſé de réſoudre cette queſtion en général, lorsque le Quart-de-cercle eſt ſuppoſé tel que parmi un très grand nombre N d'obſervations, il y en ait a qui ayent la même erreur $= \alpha$, b obſervations qui produiſent la même erreur $= \beta$, c obſervations qui ayent la même erreur

erreur $= \gamma$ & d obſervations dont l'erreur ſoit $= \delta$, &c. où α, β, γ, δ, marquent en général des nombres quelconques poſitifs ou négatifs, de ſorte qu'on ait

$$N = a + b + c + d + e + \text{&c.}$$

Cela poſé ſi l'on veut ſçavoir la probabilité, qu'ayant fait n obſervations, la ſomme de tous les nombres tirés (ſuppoſant qu'à chaque obſervation réponde un billet, comme ci-deſſus) ſoit ou 0, ou 1, ou 2, ou 3, ou en général λ, on n'a qu'à développer cette puiſſance:

$$(a\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + c\,x^{\gamma} + d\,x^{\delta} + \text{&c.})^{n}$$

& à prendre la ſomme de tous les termes affectés par la même puiſſance x^{λ}, qui étant diviſée par N^{n}, donnera la probabilité qui convient à la ſomme de tous les nombres tirés $= \lambda$, ou bien à leur milieu $\frac{\lambda}{n}$. Toutes ces opérations ſe feront ſans aucune difficulté, de la même manière que nous l'avons enſeigné ci-deſſus.

DETERMINATIO LATITVDINIS ET LONGITVDINIS FORTALITII MOSDOK DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS ANNO 1785 A THEODORO TCHERNOI INSTITVTIS.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 5 Mai 1788.

Abſolutis obſeruationibus pro definiendo ſitu Geographico praecipuorum Cherſoneſus Tauricae locorum Vir Celeb. Theodorus Tchernoi inter ſuſcepit ad Caucaſum, vt dubiam praeſertim Longitudinem Fortalitii Mosdok indubitatis ſtabiliret obſeruationibus. Animus illi fuerat definiendi poſitionem non nullorum aliorum ibidem locorum, verum valetudo aduerſa a propoſito eum deſiſtere coegit.

Die $\frac{2}{13}$ Oct. repetita in Mosdok verificatione quadrantis ad horizontem errorem illius obtinuit altitudinibus obſeruatis addendum $11'.\ 23''$, eundem fere quem antea Sewaſtopoli repererat.

Deter-

Determinatio Latitudinis Mosdok.

Dies obſeru.	Nomina Stellarum.	Altit. error. quadr. corr.	Refra-ctio.	Declin. Aberr. et Nutat. Corr.	Latitudo.
25 sept. / 6 oct.	β Cygni	73°.48′.27″	17″	27°.31′.27″ b	43°.43′.17″
	α Aquilae	54. 36. 12	41	8. 18. 49	43. 18
	ε Delphini	56. 52. 51	38	10. 35. 25	43. 12
	γ Delphini	61. 39. 14	32	15. 22. 4	43. 22
6 sept. / 7 oct.	β Cygni	73. 48. 27	—	- - -	43. 43. 17
	α Aquilae	54. 36. 5	—	- - -	43. 25
	ε Delphini	56. 52. 40	—	- - -	43. 23
	γ Delphini	61. 39. 8	—	- - -	43. 28
	ε Pegaſi	55. 11. 30	39	8 54 15	43. 24
2. sept. / 8 oct.	β Cygni	73. 48. 17	—	- - -	43. 43. 27
	α Aquilae	54. 35. 58	—	- - -	43. 32
	ε Delphini	56. 52. 44	—	- - -	43. 19
	γ Delphini	31. 39. 12	—	- - -	43. 24
	ε Pegaſi	55. 11. 27	—	- - -	43. 27
3 / 14 Oct.	α Aquilae	54. 35. 55	—	- - -	43. 43. 35
	ε Delphini	56. 52. 47	—	- - -	43. 16
	γ Delphini	61. 39. 4	—	- - -	43. 23
	ε Pegaſi	55. 11. 31	—	- - -	43. 32

Praeter altitudines ſtellarum fixarum captae ſunt non nullae altitudines meridianae Solis, verum referendis iis ſuperſedeo, quia Latitudo Fortalitii inde reſultans eadem fere prodit, quam praebent obſeruationes ſtellarum; ſumto vero ex ſupra relatis medio prodit Latitudo Fortalitii Mosdok 43°. 43′. 23″.

Determinatio Longitudinis Mosdok.

	Temp. Horol.	Temp. ver.	Altit.
Die $\frac{29}{10}$ *sept.* *oct.* meridies verus ex altitudinibus ⊙ correſpondentibus - - -	$0^h.14'.23'',9$		
— Emerſ. I. ſatell. 4 -	12. 38. 13	$12^h.23'.12''$	45°
Coelo ſereno.			
Die $\frac{1}{12}$ Oct. merid. ver. ex altitudinibus ⊙ correſpondentibus - - - - -	12. 16. 46		
— Emerſ. I. Satell. 4 - -	7. 9. 47	6. 52. 41	20
— Emerſ. II. Satell. 4 - -	15. 22. 53	15. 5. 22	31
vtraque coelo ſereno.			
Die $\frac{3}{14}$ Oct. meridies verus ex altitudinibus ⊙lis correſpondentibus - - -	0. 19. 7,6		

In Collectione obſeruationum in obſeruatorio Pariſino Anno 1785 inſtitutarum mihique benigne ab Illuſtri Comite Caſſini transmiſſarum Eclipſibus Satellitum Iouis hic recenſitis ſequentes reperio correſpondentes

Die $\frac{29}{10}$ *sept.* *oct.*	Emerſ. I. Satell. 4	$9^h.37'.25''$	Pariſiis.
		12. 23. 12	Mosdok.
	Differ. merid. -	2. 45. 47	
Die $\frac{1}{11}$ Oct.	Emerſ. II. Satell. 4	12. 19. 6	Pariſiis.
	Eadem	15. 5. 22	Mosdok.
		2. 46. 16	

Ex

Ex his binis determinationibus ſumendo medium prodit Longitudo Mosdok a meridiano Pariſino computata $2^h.\ 46'.\ 2''$, vel cum obſeruatio primi Satellitis maioris praeciſionis capax, pro vſu Geographico ſatis ſuperque exacte Longitudo Mosdok ſtatui poterit $2^h.\ 46'.$ ſiue $38°.\ 10'$ a meridiano Pariſino, et $58°.\ 10'.$ a meridiano primo.

Die $\frac{27}{16}$ $\frac{sept.}{oct.}$. Declinatio acus magneticae obſeruata eſt $6°.\ 40'.$ verſus occidentem.

REMARQUE
SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE
DE TROUVER
L'ANOMALIE EXCENTRIQUE
PAR
L'ANOMALIE MOYENNE.

PAR
NICOLAS FVSS.

Préſenté à la Conférence le 5 Mai 1788.

On trouve dans le Ephémerides aſtronomiques que M. l'Academicien Bode publie annuellement à Berlin, Année 1789, page 191, une methode de M. Klügel, pour déterminer l'Anomalie excentrique par l'Anomalie moyenne. Ce Géomètre y donne, pour cet effet, une progreſſion, dont les membres ſont les ſinus des multiples de l'Anomalie moyenne, & dont les coéfficiens ſont auſſi des progreſſions, qui ont pour termes les puiſſances de l'excentricité. Cette expreſſion eſt, à la verité, très-convergente; mais cela n'empêche pas qu'elle ne ſoit bien incommode dans l'application, parceque chaque coéfficient eſt compoſé de pluſieurs membres, qui ſont des fractions de puiſſances des l'excentricité; & ces fractions ont, en partie, d'aſſez grands nombres pour numerateurs & dénominateurs, ce qui fait que la formule demande des calculs longs & desagreables. Voici cette expreſſion

$$y = \omega$$

$$\nu = \omega - (e - \tfrac{1}{8} e^3 + \tfrac{1}{192} e^5) \text{ fin. } \omega$$
$$+ (\tfrac{1}{2} e^2 - \tfrac{1}{6} e^4 + \tfrac{1}{48} e^6) \text{ fin. } 2\omega$$
$$- (\tfrac{3}{8} e^3 - \tfrac{27}{128} e^5) \text{ fin. } 3\omega$$
$$+ (\tfrac{1}{3} e^4 - \tfrac{4}{15} e^6) \text{ fin. } 4\omega$$
$$- \tfrac{125}{384} e^5 \text{ fin. } 5\omega + \tfrac{27}{80} e^6 \text{ fin. } 6\omega$$
$$\&c.$$

où ν marque l'Anomalie excentrique, ω l'Anomalie moyenne & e l'excentricité.

La méthode ſuivante de trouver, par approximation, l'Anomalie excentrique, l'Anomalie moyenne étant donnée, eſt à la fois & plus ſimple dans l'expreſſion & plus facile dans le calcul. En gardant les mêmes dénominations, comme il y a $\nu = \omega - e$ fin. ν, ſi l'excentricité eſt une partie aſſez-petite du grand axe de l'orbite, comme elle l'eſt pour toutes les Planètes, on pourra d'abord mettre $\nu = \omega$, & l'on aura plus approchamment $\nu = \omega - e$ fin. ω. En mettant cette valeur à la place de ν dans l'expreſſion $\omega - e$ fin. ν, on aura encore plus exactement

$$\nu = \omega - e \text{ fin. } (\omega - e \text{ fin. } \omega),$$

une valeur encore plus juſte naîtra en ſubſtituant celleci, & l'on aura

$$\nu = \omega - e \text{ fin. } [\omega - e \text{ fin. } (\omega - e \text{ fin. } \omega)],$$

& de cette manière on pourra continuer la ſubſtitution, juſqu'à ce que l'expreſſion aura l'exactitude requiſe, ce qui ne manquera jamais d'arriver après peu d'opérations.

En déſignant ces valeurs approchantes par les caractères ν', ν'', ν''', &c. on aura pour l'Anomalie excentrique

$\nu' =$

$$v' = \omega - e \text{ sin. } \omega$$
$$v'' = \omega - e \text{ sin. } v'$$
$$v''' = \omega - e \text{ sin. } v''$$
$$v'''' = \omega - e \text{ sin. } v'''$$
&c.

valeurs dont le ſuivant eſt toujours plus approchant que celui qui le précède, & à l'aide desquelles on pourra, même pour des excentricités conſidérables, calculer l'Anomalie excentrique, moyennant quatre ou cinq opérations ſeulement. Car v'''' donne l'Anomalie juſte en ſecondes pour Mercure, c'eſt à dire pour celle de toutes les Planètes qui a la plus grande excentricité.

Soit, par exemple, la diſtance moyenne de Mercure au Soleil $= 1$ & ſuppoſons l'Anomalie moyenne $\omega = 86°, 26', 11''$, il y aura $e = 0,20563$, & en reduiſant ce nombre en ſecondes, $le = 4,62751$. Cela remarqué, voici le calcul:

l sin. $\omega = 9,99904$	e sin. $\omega = 42321''$
$le = 4,62751$	$\omega = 310285$
le sin. $\omega = 4,62655$	$v' = 267964''$
	ou bien $v' = 74°, 26', 4''$
l sin. $v' = 9,98377$	e sin. $v' = 40859''$
$le = 4,62751$	$\omega = 310285$
le sin. $v' = 4,61128$	$v'' = 269426''$
	ou bien $v'' = 74°, 50', 26''$
l sin. $v'' = 9,98462$	e sin. $v'' = 40938''$
$le = 4,62751$	$\omega = 310285$
le sin. $v'' = 4,61213$	$v''' = 269347''$
	ou bien $v''' = 74°, 49', 7''$

l sin.

l sin. $v''' = 9,98457$	e sin. $v''' = 40934''$
$le = 4,62751$	$\omega = 310285$
le sin. $v'''' = 4,61208$	$v'''' = 269351''$
	ou bien $v'''' = 74°, 49', 11''$

Il y a donc ici l'Anomalie excentrique $v = 74°, 49', 11''$, valeur qui satisfait exactement à l'équation $v = \omega - e$ sin. v.

Pour Venus, dont l'excentricité est seulement $e = 0,00706$, on aura $le = 3,16323$. En prenant donc l'Anomalie moyenne $\omega = 21°, 54', 45''$, on aura à faire le calcul suivant:

l sin. $\omega = 9,57193$	e sin. $\omega = 543''$
$le = 3,16323$	$\omega = 78885$
le sin. $\omega = 2,73516$	$v' = 78342$
	ou bien $v' = 21°, 45', 42''$
l sin. $v' = 9,56908$	e sin. $v' = 540''$
$le = 3,16323$	$\omega = 78885$
le sin. $v' = 2,73231$	$v'' = 78345$
	ou bien $v'' = 21°, 45', 45''$

Valeur qui satisfait déjà parfaitement à l'équation $v = \omega - e$ sin. v & donne l'anomalie excentrique juste jusqu'aux secondes $v = 21°, 45', 45''$, & si l'Anomalie moyenne est plus grande, une seule operation suffira pour trouver l'Anomalie excentrique.

Cette méthode si simple & si facile n'est pas nouvelle: elle appartient, si je ne me trompe, à feu M. Euler, qui au moins en a déjà fait mention, il y a plus de 50 ans, dans un Mémoire inséré au XIIe Volume des Commentaires de notre Académie pour l'Année 1740, intitulé: *Emendatio Tabula-*

rum aſtronomicarum per loca Planetarum Geocentrica. Mais elle eſt comme enfouie dans cette diſſertation, où perſonne ne la cherche; cependant les moyens d'exprimer l'Anomalie excentrique par l'Anomalie moyenne ne ſont pas ſans utilité, & celui ci merite ſurtout d'être mieux connu qu'il ne paroît l'être, parce qu'il la fournit, comme on voit, par un calcul très-court & très-aiſé; c'eſt pourquoi j'ai crû devoir ſaiſir l'occaſion que m'a préſenté l'expreſſion de M. le Profeſſeur Klügel, pour en renouveller la mémoire.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG.
EN L'ANNÉE MDCCLXXXV.

Suivant le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 24. *Avril* 1788.

Je renvois encore le lecteur au premier volume de ces nouveaux Actes pour la déſcription & l'expoſition de mes Inſtrumens météorologiques, ainſi que pour ma maniere d'obſerver le variations que les changemens d'atmosphère y produiſent: je paſſe donc tout de ſuite aux tables mêmes qui repréſentent les concluſions principales tirées de mes obſervations.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure	P. cent.	jour,	heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.81	21.	6. s.	27.41	7.	9. s.	140	28.11	28.173
Février	28.87	12.	1. s.	27.00	28.	minuit	187	27.93	28.150
Mars	28.35	3.	midi	27.38	27.	8. s.	97	27.86	27.784
Avril	28.64	30.	7. m.	27.22	1.	10. m.	142	27.93	28.037
Mai	28.28	13.	9. m.	27.37	16.	minuit	91	27.82	27.856
Juin	28.23	5.	3. s.	27.44	3.	10. s.	79	27.83	27.830
Juillet	28.13	25.	3. m.	27.21	12.	3. m.	92	27.67	27.714
Août	28.24	5.	4. s.	27.56	29.	5. m.	68	27.90	27.863
Sept.	28.36	13.	midi	27.22	26.	9. s.	114	27.79	27.857
Octobr.	28.34	6.	9. m.	27.56	26.	3. s.	78	27.95	27.931
Novembr.	28.48	15.	3. m.	27.16	17.	10. m.	132	27.82	27.859
Décembr.	29.04	17.	1. s.	27.38	29.	8. m.	166	28.21	28.449

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *soir* ou *après-midi*.

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle; avec la hauteur qui répond au demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	Baromètre, un demi-mois au dessus de Pouces. cent.
Janvier.	28. 3	26. 3	23. 3	20. 9	15. 12	28. 20
Février	25. 9	21. 18	18. 12	16. 15	12. 15	28. 16
Mars	14. 0	10. 6	6. 0	2. 21	1. 9	27. 76
Avril	23. 12	20. 0	16. 3	10. 0	7. 15	28. 01
Mai	16. 9	13. 6	10. 9	5. 21	3. 12	27. 82
Juin	16. 18	12. 6	7. 0	2. 15	1. 3	27. 84
Juillet	11. 18	7. 18	3. 21	0. 15	0. 0	27. 76
Août	18. 18	13. 21	7. 21	1. 12	0. 15	27. 88
Sept.	17. 18	13. 21	9. 21	7. 0	3. 12	27. 86
Oct.	22. 6	17. 15	11. 15	6. 3	3. 9	27. 93
Nov.	17. 0	14. 0	8. 21	5. 0	2. 15	27. 86
Déc.	27. 18	26. 15	25. 3	23. 18	22. 0	28. 55

3.) Variations considérables & subites du Baromètre.

bis.	Temps jour. heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	2. 12. s.	33	28. 24	−59	184	E.	ciel serein.
	4. 9. m.		27. 65		164	SE.	c. couvert, brouillard, neige.
	6. 3. m.	42	28. 17	−76	172	E.	c. couvert.
Jnv.	7. 9. s.	47	27. 41	+134	165	E. fort.	c. couv. beaucoup de neige.
	9. 8. s.	18	28. 75	−52	162	Ou. fort.	c. serein, ens. couv. & neige.
	10. 2. s.		28. 23		152	Ou. ff.	c. couvert, neige.
	19. 2. s.	46	27. 83	+97	150	SOu.	c. couv. neige, ensuite c. serein.
	21. 12. m.		28. 80		185	SE. Ou.	c. serein.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	9.	12. s.		27.	77		154	NE.	c. couv. enſuite demi-couv
	10.	12. s.	60	28.	32	+110	157	SOu.	c. demi-couvert.
	12.	12. m.		28.	87		174	Ou. calme	brouillard: ciel ſerein.
	13.	12. s.		28.	38		165	calme.	c. couvert.
Févr.	14.	12. s.	84	27.	95	—135	162	Ou.	c. couvert, enſuite neige.
	15.	12. s.		27.	52		163	Ou.	c. couv. neige.
	27	midi		28.	68		186	N. fort	c. ſerein.
	27	minuit	36	28.	50	—168	189	N. fort.	c. demi-couvert, brouillard
———	28	minuit		27.	00		165	S. ff.	c. couv. beaucoup de neig
	1	minuit	24	28.	05	+105	190	NOu. ff.	c. ſerein.
	16.	10. m.		28.	03		165	calme S.	c. couvert.
	17.	6. m.	20	27.	48	—55	157	Ou. fort.	c. demi-couv. enſuite neig
	19.	12. m.		28.	12		162	calme Ou.	c. ſerein.
	19.	12. s.		27.	97		170	S. fort.	c. demi-couv. Aurore bor
	20.	12. s.	42	27.	45	—70	163	SE.	c. ſerein.
Mars.	21.	6. m.		27.	42		165	E.	c. couv. enſuite neige.
	31.	12. m.		27.	77		155	NOu.	c. ſerein.
———	1.	10. m.	22	27.	22	—55	160	N. ff.	c. couvert, neige.
	2.	12. s.	38	28.	03	+81	155	SE. calme	c. demi-couvert.
	4.	9. m.		27.	72		148	SE.	c. couvert, neige & pluie.
	4.	12. s.		27.	97		159	SE. fort.	c. demi-couv. enſuite ſerei
Avril	5.	12. s.	48	28.	53	+85	165	E.	c. ſerein, brouillard.
	6.	9. m.		28.	57		152	S.	c. ſerein.
	12.	6. m.		28.	24		165	calme.	ciel demi-couvert.
	13.	6. m.	24	27.	60	—64	151	SOu. fort.	c. couv. neige, enſuite plui

Mois

Mois.	Temps jour heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	1. 0. m.	24	28. 48	−50	151	calme.	c. serein, brouillard.
Mai	1. 12. s.		27. 98		142	S.	c. demi-couvert.
	21. 12. s.	24	27. 60	+49	141	N.	beaucoup de pluie, c. demi-
	22. 12. s.		28. 09		142	Ou. calme	c. serein. (couvert.
	4. 5. m.	30	27. 48	+75	144	N. fort	c. demi-couvert.
Jin.	5. 11. m.		28. 23		126	variable	c. serein.
	25. 12. m.	36	27. 99	−49	128	Ou.	c. demi-couv. enſuite pluie.
	26. 12. s.		27. 50		133	Ou.	c. demi-couvert, pluie.
Août	4. 6. m.	34	27. 67	+57	137	NOu.	c. couv. & beaucoup de pluie.
	5. 4. s.		28. 24		128	Ou.	c. serein.
	5. 12. s.	33	28. 15	−50	136	NE.	c. demi-couv. enſuite pluie.
	7. 9. m.		27. 65		125	Ou. fort.	c. couv. beaucoup de pluie.
	14. 6. m.	30	28. 30	−59	142	S.	c. couv. Aurore boreale.
Spt.	15. 12. m.		27. 71		131	Ou.	pluie, ciel demi-couvert.
	20. 12. s.	27	27. 90	−49	144	SE.	c. couvert.
	22. 3. m.		27. 41		143	Ou.	c. couv. pluie.
	25. 12. s.	21	28. 66	−44	142	SE.	c. couvert. (& des éclairs
	26. 9. s.		27. 22		131	SOu. fort.	c. demi-couv. beauc. de neige
	1. 3. s.	30	27. 51	+66	148	SOu. fort.	c. couv. neige & pluie.
	2. 9. s.		28. 17		155	calme.	c. serein, Aurore boreale.
	8. 6. m.	36	27. 74	+58	149	SE.	c. demi-couvert, pluie.
	9. 6. s.	18	28. 32	−58	155	SOu. ff.	c. ſer. enſuite couv. & neige
Nov.	10. 12. m.		27. 74		150	Ou. fort.	c. demi-couvert.
	13. 3. m.		27. 58		149	SOu. fort.	c. couv. pluie, enſuite neige.
	14. 3. m.	48	28. 05	+90	158	NE. fort.	c. couvert.
	15. 3. m.	21	28. 48	−56	165	S.	c. serein.
	15. 12. s.		27. 92		152	Ou. fort.	c. couvert.

Mois

Mois.	Temps jour heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Nov.	16. 12. m.	20	27. 92	−76	152	NOu. fort.	c. demi-couv. puis neige &
	17. 10. m.	24	27. 16	+50	148	Ou. fort.	c. couvert. (pluie.
	18. 10. m.		27. 66		152	calme.	c. serein, ensuite couv. & neige
	23. 12. m.	27	28. 20	−58	150	NOu. calm.	c. couvert, ensuite pluie.
	24. 3. s.		27. 62		149	SOu. ff.	c. demi-couv. neige & pluie.
Déc.	3. 9. s.	21	28. 12	−49	151	SE.	ciel couvert.
	4. 6. s.	24	27. 63	+49	153	E. fort.	neige & ciel couvert.
	5. 6. s.		28. 12		154	SOu.	c. demi-couvert, puis clair.
	27. 12. s.	32	28. 18	−80	176	S.	c. serein, puis couv. & neige.
	29. 8. m.	40	27. 38	+72	164	N. fort.	neige c. couvert, puis serein.
	30. 21. s.		28. 10		178	N.	ciel serein.

ff. marque, que le vent a été très fort.

Resumé des observations Barométriques.

La plus grande hauteur du Baromètre en 1785 a été observée, le 17 Décembre à 1 heure après midi, de 29,04 pouces de Paris. Thermomètre de Délisle 178. Ciel serein, vent du Sud.

La plus petite hauteur, le 28 Février à 12 heures du soir, de 27,00 pouces. Thermomètre 185. Ciel couvert, beaucoup de neige, vent du Sud très fort.

La variation totale 2,04 pouces, & le milieu 28,02.

La hauteur moyenne 27,958, c'est à dire $27\frac{958}{1000}$ pouces.

Le

Le Baromètre a été en cette année

239 jours	15 heures,	au deſſus de	27, 80
197 ——	9 ——	au deſſus de	27, 90
148 ——	12 ——	au deſſus de	28, 00
102 ——	9 ——	au deſſus de	28, 10 &
73 ——	21 ——	au deſſus de	28, 20 pouces

D'où nous concluons la hauteur, au deſſus de laquelle le Baromètre a été pendant la demi-année ou pendant $182\frac{1}{2}$ jours, égale à 27, 93, qui eſt de $\frac{28}{1000}$ pouces plus petite que la moyenne.

La deſcente la plus conſidérable & la plus ſubite a été de $1\frac{68}{100}$ pouces en 36 heures, & pendant cet intervalle de temps elle a même été de $1\frac{1}{2}$ pouces en 24 heures, le 27 Février.

Les montées le plus conſidérables & les plus ſubites ſont; de $1\frac{5}{100}$ pouce en 24 heures le 28 Février, & de $1\frac{34}{100}$ pouce en 47 heures le 7 Janvier.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrèmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Hauteurs extrèmes.						Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas			Au plus haut.				Froid moyen.	Chaleur moyen.
	Degré.	jour	heure.	Degré.	jour	heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	191	21.	7. m.	148	24.	2. s.	43	166,2	159,6
Février	198	19.	6. m.	149	7. / 10.	10. s. / 2. s.	49	171,3	162,9
Mars	200	3.	6. m.	146	8.	2. s.	54	173,0	159,0
Avril	169	9.	6. m.	137	21.	2. s.	32	156,6	145,8
Mai	155	3.	6. m.	126	15.	2. s.	29	145,8	135,2
Juin	146	3.	10. s.	114	20.	2. s.	32	134,5	126,8
Juillet	134	4. / 14.	6. m.	108	23.	2. s.	26.	129,6	121,6
Août	141	30.	6. m.	111	19.	2. s.	30	130,1	119,8
Sept.	152	20.	6. m.	122	5. / 8.	2. s.	30	141,5	131,5
Octobr.	158	9.	6. m.	138	25.	2. s.	20	148,3	144,0
Novem.	165	15.	6. m.	145	11.	6. m.	20	153,4	149,3
Décem.	197	32.	9. m.	149	1. / 3.	2. s.	48	167,6	162,6

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Froid plus grand que							Chaleur plus grande que						
	190 jours	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.
Janv.	1	6	8	21	31	31	31					6	18	27
Févr.	3	9	13	21	28	28	28					2	14	22
Mars	2	8	16	28	31	31	31					3	21	27
Avril				10	26	30	30				5	28	30	30
Mai					5	31	31			3	23	31	31	31
Juin						7	25		3	18	30	30	30	30
Juillet						19	31	2	11	29	31	31	31	31
Août					2	13	31		20	27	31	31	31	31
Sept.				2	20	29	30			14	29	30	30	30
Oct.				12	31	31	31				5	31	31	31
Nov.			2	25	30	30	30					21	30	30
Déc.	2	3	14	22	31	31	31					3	14	26
1785.	8	26	51	104	191	272	329	2	34	91	154	247	311	346

Nous tirons de ces deux Tableaux les concluſions ſuivantes :

Le plus grand froid, qui ordinairement tombe en Janvier, a été obſervé en cette année le 3 de Mars matin, de 200^d. ou ſuivant la diviſion de Réaumur de $26\frac{3}{4}$. Baromètre 28, 33. Ciel ſerein, vent de SOu.

La plus grande chaleur a été de 108^d, c'eſt à dire de $22\frac{1}{2}$ ſuivant Réaumur, le 23 Juillet après midi. Baromètre

27. 85. Ciel ſerein, vent de SE. Il y a eu ce même ſoir un fort orage.

La différence entre ces deux temperatures extrêmes eſt par conſéquent de 92 degrés de Délisle, qui font à peu près 49 degrés de Réaumur.

Le froid moyen, par lequel je déſigne la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées de grand matin & au ſoir, diviſée par leur nombre, a été trouvé:

pour toute l'année, 151 $\frac{1}{2}$, & ſelon Réaumur $\frac{3}{4}$ degrés au deſſous de 0,

pour les ſix mois d'hyver, Janv. Févr. Mars, Avril, Novembre & Décembre 164 $\frac{3}{4}$, & ſelon Réaumur 7 $\frac{3}{4}$ degrés au deſſous de 0,

& pour les ſix mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre 138 $\frac{1}{3}$, & ſelon Réaumur 6 $\frac{1}{3}$ degrés au deſſus de 0.

La chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre, a été trouvée:

pour toute l'année, 143 $\frac{1}{10}$ d. ce qui correſpond à une chaleur de 4 $\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur,

pour les ſix mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Aout, Septembre & Octobre 129 $\frac{4}{5}$, ou ſuivant Réaumur 11 degrés, &

pour les ſix mois d'hyver, Janv. Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre 156 $\frac{1}{2}$, ou ſuivant Reaumur 3 degrés au deſſous de 0.

Il y

Il y a eu cette année 191 jours de gélée, & en 104 jours le froid a ſurpaſſé 160 degrés: parmi ceux-ci ont été trouvés 51, où le froid a été plus grand que 170, & 26 où il a ſurpaſſé 180 degrés, entre leſquels il y avoient enfin 8 où le froid a excedé 190 degrés de Délisle.

Enſuite il y a eu 247 jours de degél, & parmi ceux-ci 154 où la chaleur a été plus grande que 140: en 91 jours la chaleur a ſurpaſſé 130, & en 34 jours, 120 degrés, dont il n'y avoient que 2 jours, où la chaleur a été plus forte que de 110 degrés de Délisle.

Les tables ſuivantes indiqueront ces jours de froid & de chaleur plus en détail.

1. Le froid a été obſervé entre

		jours
190 & 200	le 21 Janvier, le 19. 20. 27 Février, le 2. 3 Mars, & le 30. 31 Décembre - -	8
180 & 190	le 2. 3. 8. 9. 20 Janv. le 13. 18. 21. 25. 26. 28 Févr. le 1. 14. 19. 24. 30. 31 Mars, & le 17 Décembre - - - -	18
170 & 180	le 5. 6 Janv. le 11. 12. 17. 22 Févr. le 4. 13. 15. 16. 18. 23. 25. 26 Mars, & le 14. 15. 16. 21 — 25. 27. 28. 29 Décembre	25
160 & 170	le 1. 4. 7. 10. 14. 15. 16. 22. 23. 27. 28. 29. 31 Janv. le 1. 2. 4. 14. 15. 16. 23. 24 Févr. le 5. 6. 7. 11. 12. 17. 20. 21. 22. 27. 28. 29 Mars, le 1. 2. 5. 6. 9 — 12. 16. 19 Avril, le 14. 15. Nov. & le 6. 9. 11. 13. 18. 19. 20. 26. Décembre -	53
150 & 160	le 11. 12. 13. 17. 18. 19. 24. 25. 26. 30 Janv.	

		jours
	le 3. 5 — 10 Févr. le 8. 9. 10 Mars, le 3. 4. 7. 8. 13. 14. 15. 17. 18. 20. 21. 26 — 30 Avril, le 1. 3. 4. 10. 11 Mai, le 19. 20 Sept. le 5 — 10. 19 — 23. 30 Oct. le 1. 2. 3. 5 — 10. 12. 13. 16 — 19 22 — 29 Nov. & le 1 — 5. 7. 8. 10. 12 Décembre - - - - - -	87

2. La chaleur a été obſervée entre

		jours
110 & 100	le 22 & 23. Juillet - - - -	2
120 & 110	le 20. 21. 22 Juin, le 18. 19. 21. 24 — 27. 30. 31 Juillet, & le 2. 7. 9 — 26 Août	32
130 & 120	le 15. 23. 25 Mai, le 5 — 12. 17. 18. 19. 23. 25. 26. 29 Juin, le 1 — 13. 16. 17. 20. 28. 29 Juillet, le 1. 3 — 6. 8. 27 Août, & le 1 — 10. 13. 14. 15. 26 Septembre - - - - -	57
140 & 130	le 7. 20 — 23 Avril, le 1. 2. 7. 8. 13. 14. 16 — 22. 24. 26 — 31 Mai, le 1 — 4. 13 — 16. 24. 27. 28. 30 Juin, le 14. 15 Juillet, le 28 — 31 Août, le 11. 12. 16 — 25. 27 — 29 Sept. & le 1. 3. 13. 25. 26 Octobre - - - -	63
150 & 140	le 11. 12. 19. 24. 25. 26 Janv. le 7. 10 Févr. le 7. 8. 10 Mars, le 2 — 6. 8. 10 — 19. 24 — 30 Avril, le 3 — 6. 9 — 12 Mai, le 30 Sept. le 2. 4 — 12. 14 — 24. 27 — 31 Oct. le 1. 3. 4. 5. 8. 10 — 13. 17 — 24. 26. 27. 29. 30 Novembre, & le 1. 2. 3 Décembre - - - - -	93

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.	Variable.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	3	15	10	3	1	1	5	5	3	7	8	1	
Févr.	2	16	7	3	2	4	3	3	4	4	7	1	
Mars	5	19	6	1	2	0	0	3	2	4	11	6	3
Avril	10	14	5	1	2	0	2	4	3	4	7	6	2
Mai	8	14	9	0	2	3	1	1	5	5	7	6	1
Juin	11	12	5	2	5	4	9	0	2	0	2	6	2
Juillet	13	11	6	1	4	4	5	5	3	1	6	1	2
Août	13	12	6	0	0	3	6	9	3	1	3	6	
Sept.	6	15	9	0	5	2	0	2	1	5	8	7	
Oct.	4	17	8	2	4	0	5	6	6	5	2	3	
Nov.	8	9	11	2	2	1	4	3	5	5	3	6	1
Déc.	1	18	10	0	3	0	8	9	2	2	3	4	
Année 1785.	84	172	94	15	32	22	48	50	39	43	67	53	11

Le mois de Janvier a donc été le plus venteux, & après lui les mois de Février, Novembre & Octobre. Le moins venteux, ou le plus calme ſe trouve être le mois d'Août, & après lui ceux de Décembre, de Juillet & d'Avril.

Le rapport des quatre plages eſt pour cette année 1785: Nord, 73: Eſt, 88: Sud, 88: Oueſt, 116. De ſorte que le vent dominant a encore été celui de l'Oueſt, qui ſur-tout a regné en Mars, Septembre, Mai & Avril.

2.) Di-

2.) Direction des vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	le 25. 27 Fevrier, le 1 Avril, le 4. 30 Juin, le 2 Septembre & le 29 Décembre - -	7
NE.	le 26 Février, le 28. 29 Mai, le 15 Juin, le 5. 7. 11 Juillet, & le 14 Novembre -	8
Eſt.	le 6. 7 Janvier, le 20 Février, le 3. 6. 9 Juin, le 6. 27 Juillet, le 20 Août, le 7 Novembre, & le 4. 10 Décembre - - -	12
SE.	le 8. 21 Février, le 27 Mars, le 23 Juillet, le 11 Août, le 14 Octobre & le 12. 13. 28 Decembre - - - - - - -	9
Sud.	le 29. 30 Janvier, le 5. 7. 22. 28 Février, le 20 Mars, le 18. 19 Mai, le 26. 28 Août, le 6 Septembre, le 26. 28. 29 Octobre, le 28 Novembre, & le 21 Décembre -	17
SOu.	le 10. 11. 18. 23. 24. 25 Janvier, le 12 Mars, le 13. 24 Avril, le 8. 20 Mai, le 26. 27 Septembre, le 24. 25. 27. 29. 31 Octobre, le 1. 10. 15. 24 Novembre, & le 1. 5 Décembre - - - - - - - -	24
Oueſt.	le 9. 20. 28 Janvier, le 9. 17. 25 Mars, le 26. 27 Avril, le 9. 10 Mai, le 2. 3 Août, le 7. 8. 24. 28 Septembre, le 23 Octobre, le 11. 17. 26 Novembre, & le 20 Décembre	21
NOu.	le 1 Mars, le 5 Avril, le 11 Mai, le 14 Juin, le 28 Juillet, le 23 Septembre, le 12. 16. 25 Novembre, & le 18. 19 Décembre -	11

Entre

Direction	Entre ces vents se trouvoient être les plus violens, ceux du	Nombre de jours.
Nord	25 Février, & du 1 Avril - - - -	2
NE.	du 26 Février, & du 15 Juin - - - -	2
Sud.	du 28 Février, & du 26 Octobre - - -	2
SOu.	du 10. 18. 24 Janvier, 27 Octobre, & du 10. 24 Novembre - - - - - - -	6
NOu.	du 1 Mars, 14 Juin, & du 28 Juillet - -	3

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel. serein jours.	Ciel. couvert jours	Brouillard jours.	Pluie. forte jours	Pluie. petite jours.	Neige. copieuse jours.	Neige. petite jours.	Eau de pluie & de neige Pouces $\frac{1}{155}$	
Janv.	4	16	3		2	2	11	1	17
Févr.	7	15	2		2	1	7	0	83
Mars	8	6	4		1		15	0	57
Avril	12	7	4		7		9	0	85
Mai	6	9	3	4	12	2	1	0	87
Juin	10	11	0	4	13			1	96
Juillet	9	7	0	9	9			1	86
Août	11	4	4	6	9			1	38
Sept.	10	10	1	3	13		2	0	89
Oct.	3	16	4		17		6	0	75
Nov.	0	16	3		10	1	11	0	35
Déc.	7	17	1		0	2	13	0	40
Année 1785.	87	134	29	26	95 (121)	8	75 (83)	11	88

Il gréla le 9. 11. Mai, le 10 Juillet, & le 24 Août.

Il y eut 4 orages complets, le 23 Juin, le 23, 25 Juillet & le 24 Août. Il tonnoit de loin le 19 Mai, le 21 Juin, & le 26 Juillet. Il faiſoit des éclairs les nuits du 12 Juin, du 22 Juillet, du 24 Août, du 26 Septembre & du 29 Novembre.

Le nombre des Aurores boreales monte à 14; dont 8 furent fort ſplendides, ſavoir celles du 29 Janvier, 6 Mars, 7 Avril, 9 Août, 8, 14 Septembre, 5 Octobre & du 2 Novembre. Les autres 6 moins remarquables furent obſervées, le 19 Mars, 26 Avril, 11, 12 Septembre, & le 4, 9 Octobre. Le 18 & 19 Avril furent vûs des parhélies d'une grande beauté, le premier ſurtout, dont il a déja été fait mention dans la partie hiſtorique du ſecond volume de ces nouveaux Actes pag. 106.

La Neva debacla dans la nuit du 2 au 3 Mai: Baromètre 27, 65. Thermomètre 152, vent du NOu, ciel demi-couvert, & un peu de neige. La riviere avoit été priſe pendant 148 jours: les glaces du lac de Ladoga parurent le 12 Mai, & la riviere ne les charia que 24 heures, jusqu'au 13.

Le 15 Novembre revinrent les glaces, & la riviere les charia presque continuellement pendant 23 jours, en très grande quantité, jusqu'au 8 Décembre, où la Neva fut repriſe par une temperature de 156 à 158 degrés de Délisle. Baromètre 28. 43, vent d'Eſt, ciel couvert. L'intervalle entre la débacle & la priſe a donc été cette année de 223 jours.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

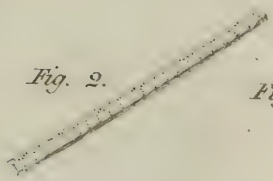


Fig. 2.

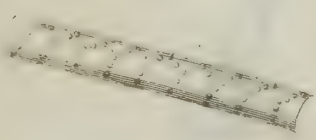


Fig. 3.

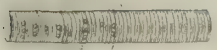


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig 7.

Fig. 9.

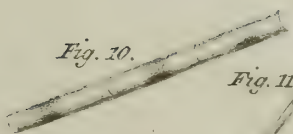


Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

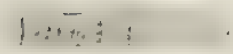


Fig. 5.

Fig. 6

Fig. 7.

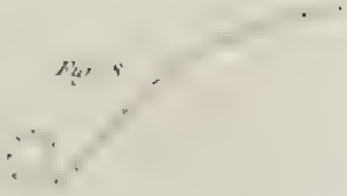


Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

Fig. 11

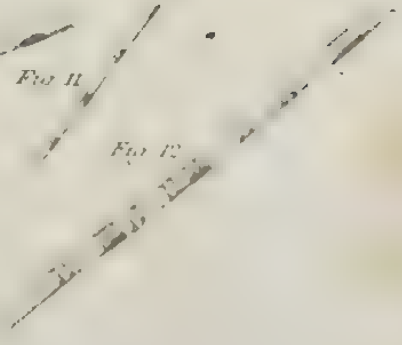


Fig. 12

Fig. 2.

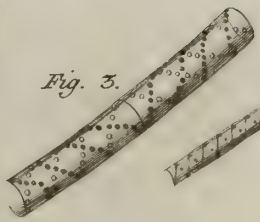


Fig. 3.

Fig. 4.

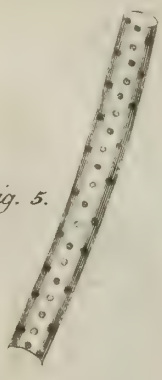


Fig. 5.

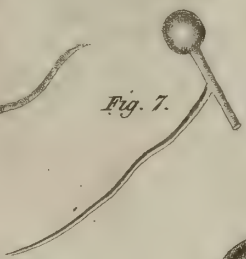


Fig. 7.

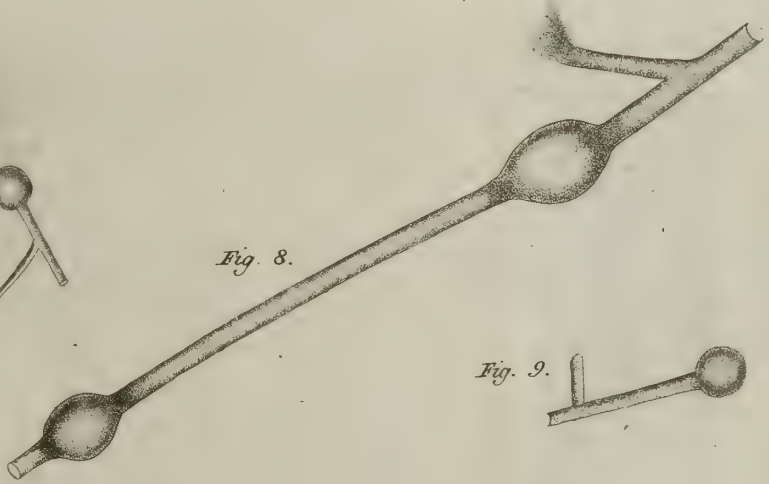


Fig. 8.

Fig. 9.

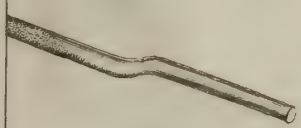


Fig. 11.

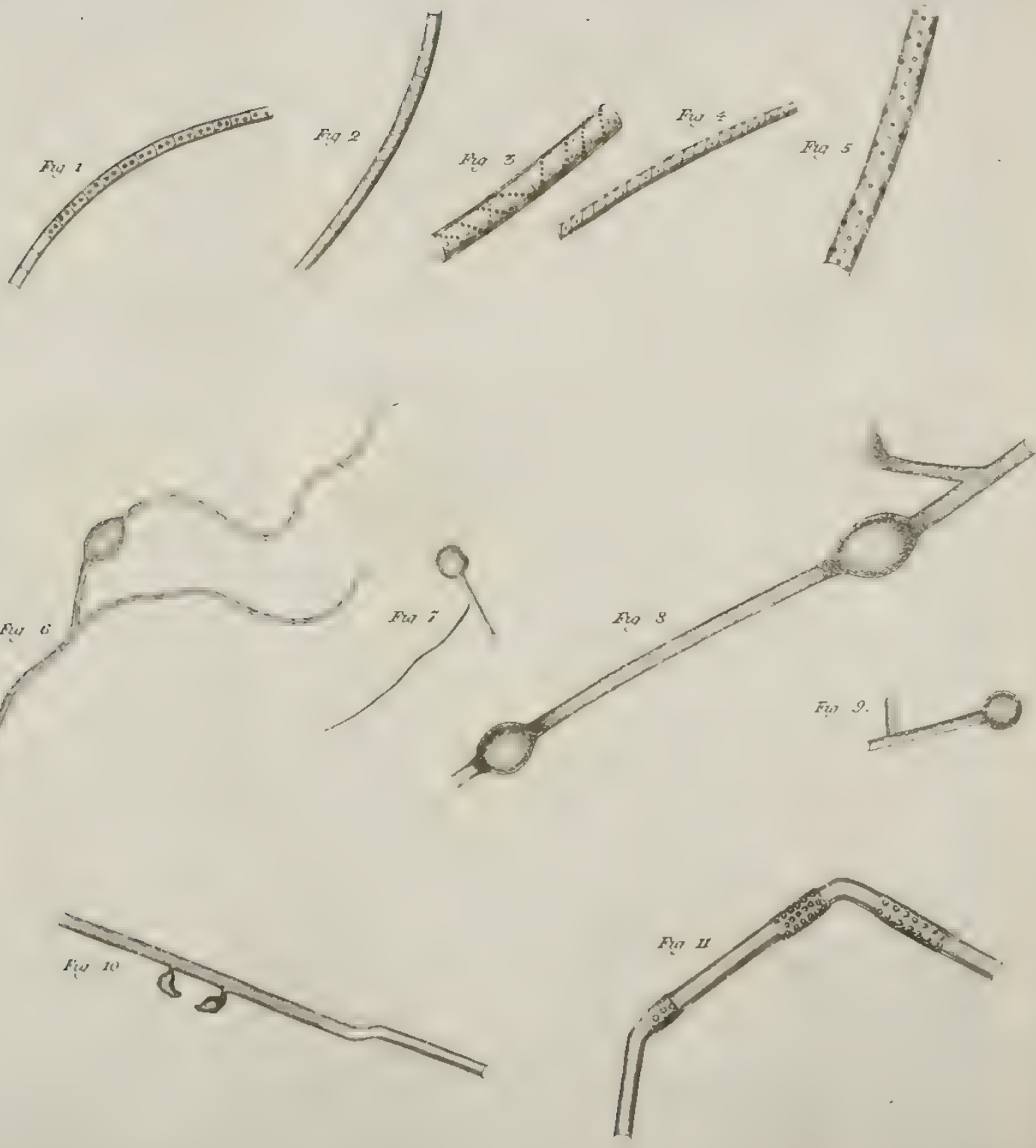


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9.
Fig 10
Fig 11

Fig. 2.

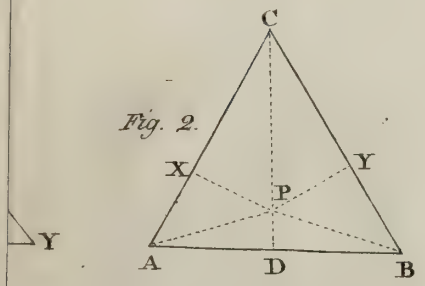


Fig. 3.

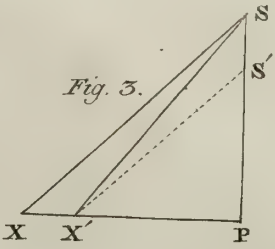


Fig. 6.

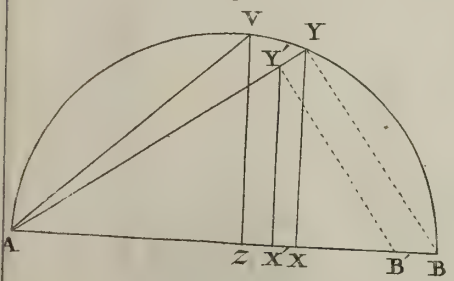


Fig. 5.

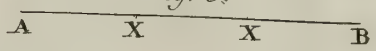


Fig. 7.

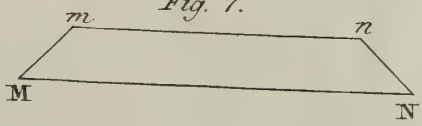


Fig. 9.

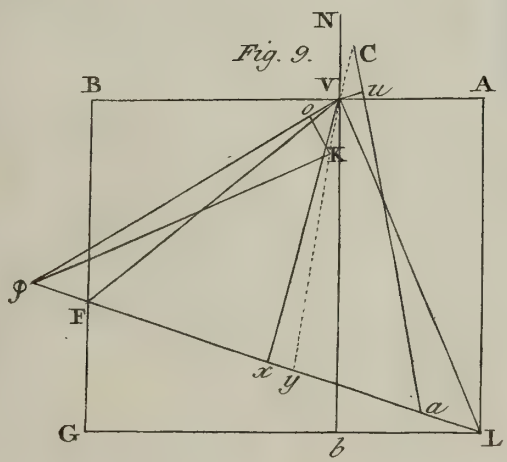


Fig 1

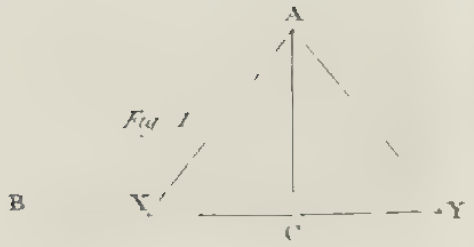


Fig 2

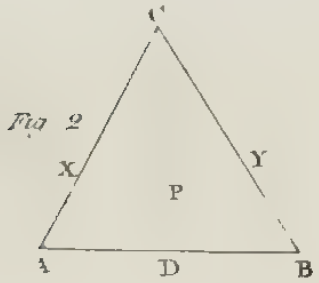
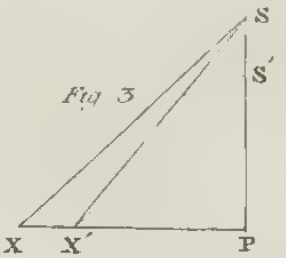


Fig 3



D.

Fig 4

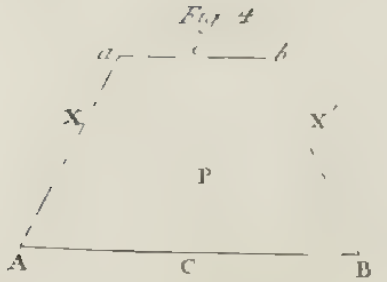


Fig 6

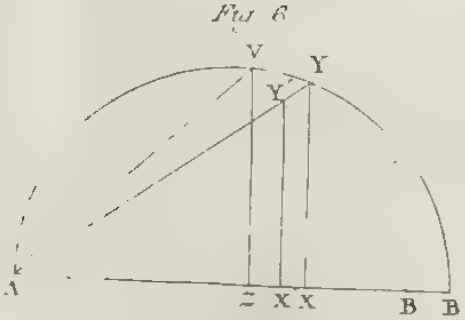


Fig 5

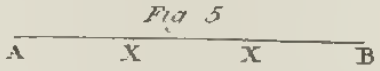


Fig 7

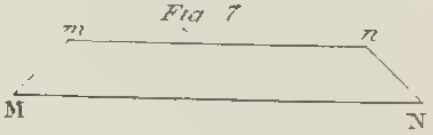


Fig 8

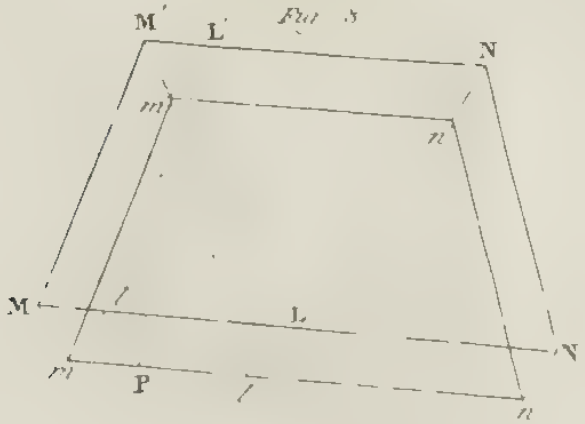


Fig 9

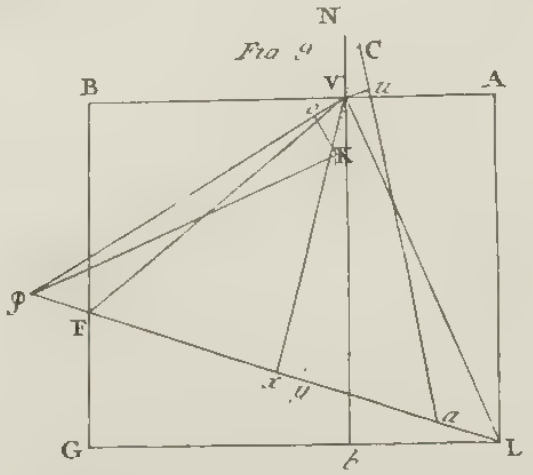
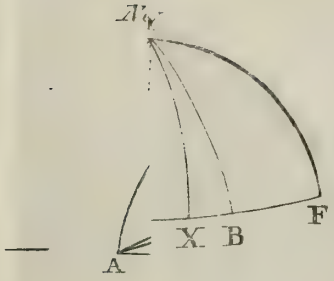


Fig 10



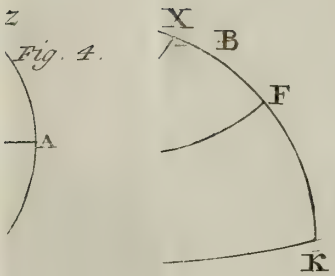
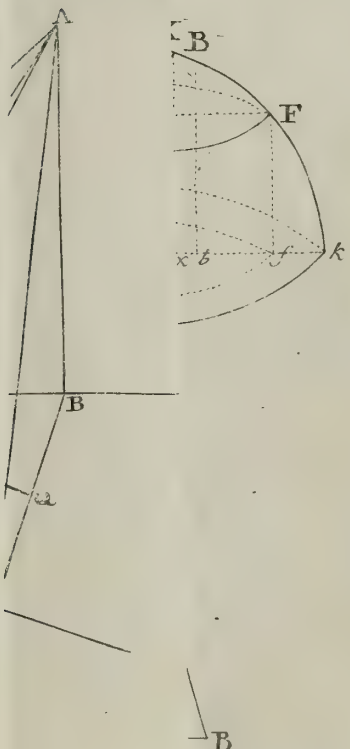


Fig. 4.



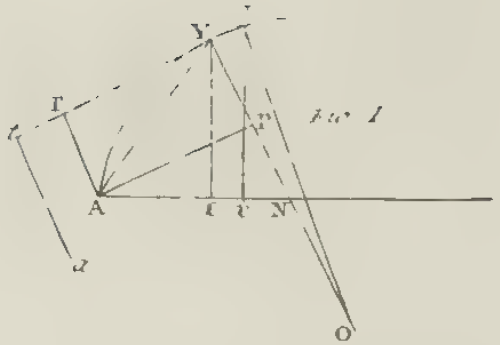


Fig. 1

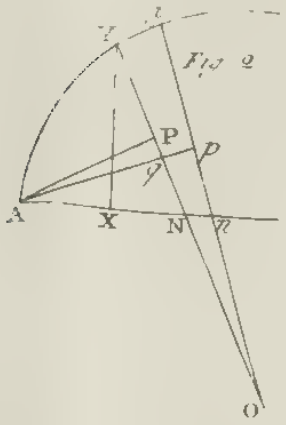
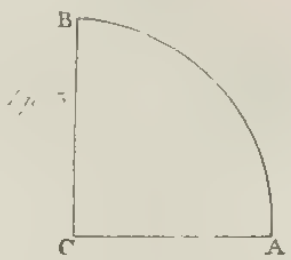


Fig. 2



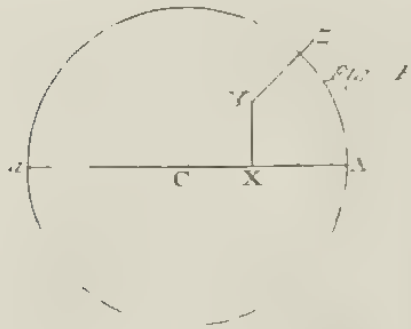


Fig. 4

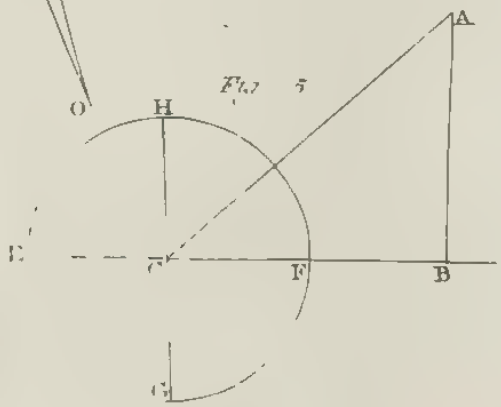


Fig. 5

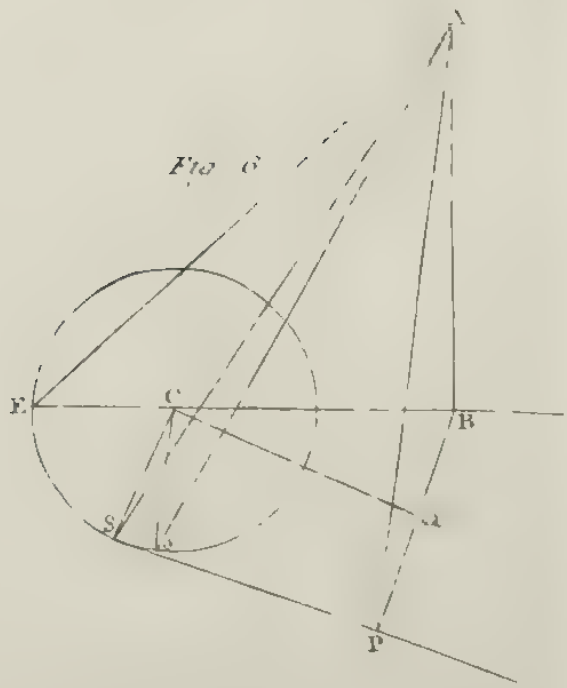


Fig. 6

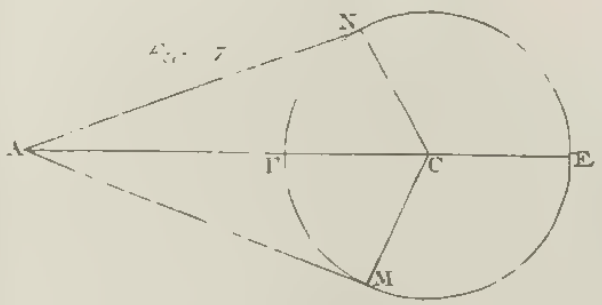


Fig. 7

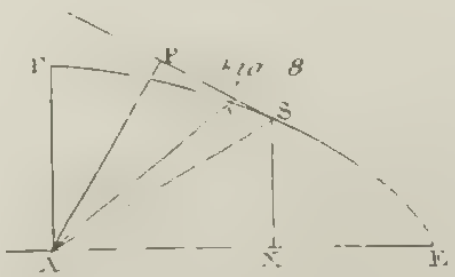


Fig. 8

Fig. 2.

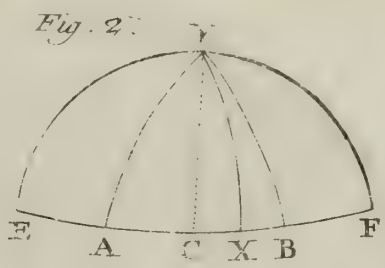


Fig. 4.

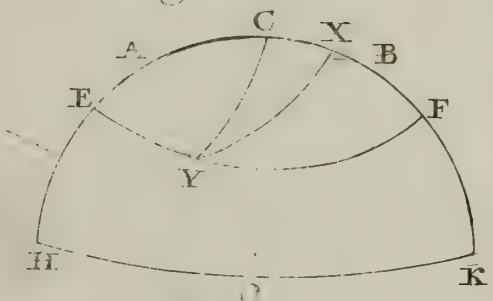
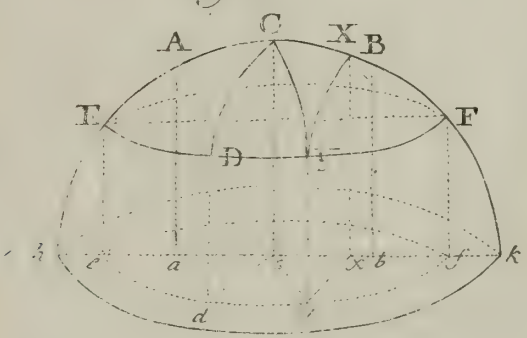


Fig. 6.



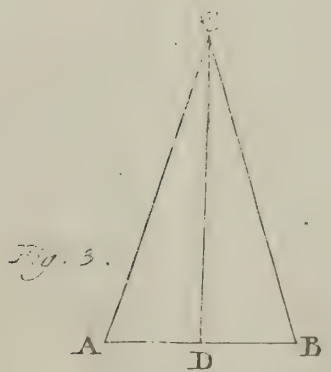


Fig. 3.

Fig. 1.

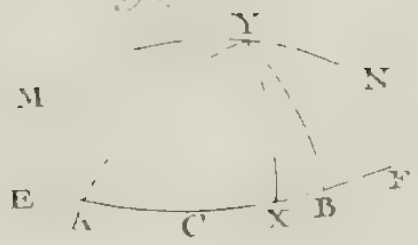


Fig. 2

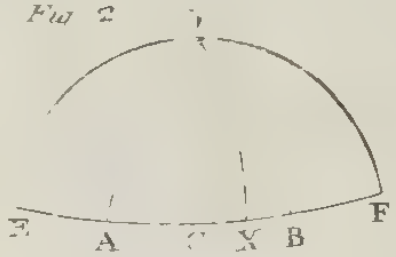


Fig. 3

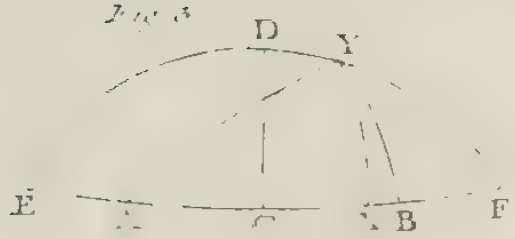


Fig. 4

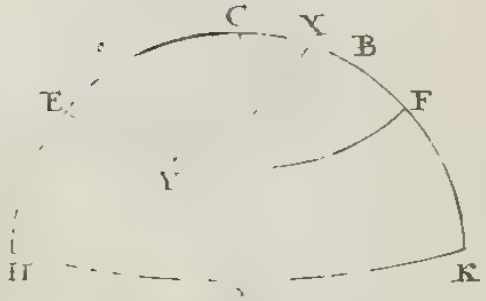


Fig. 5

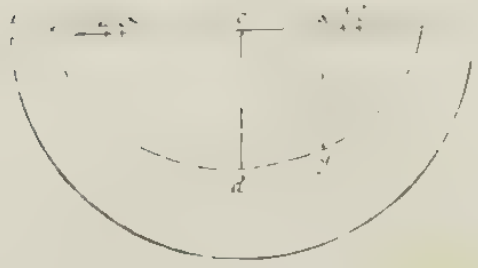


Fig. 6

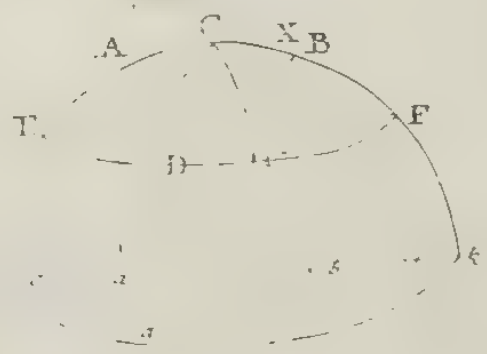
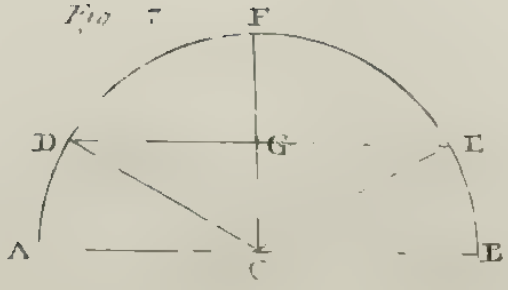
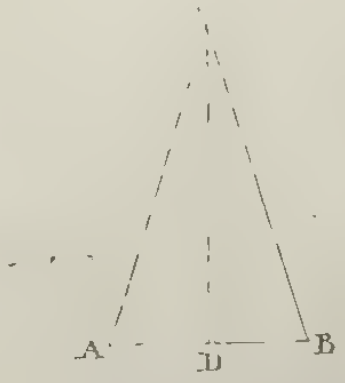


Fig. 7





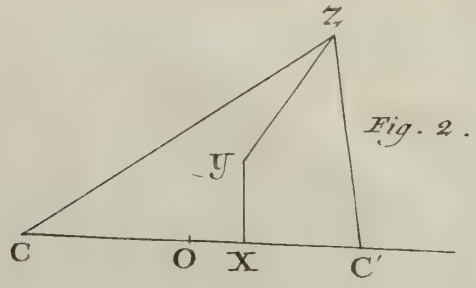


Fig. 2.

Fig. 3.

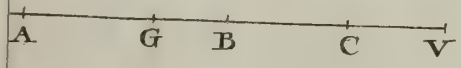


Fig. 4.

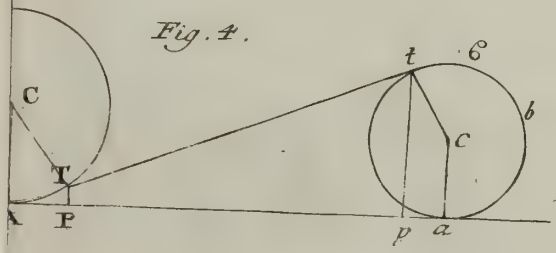
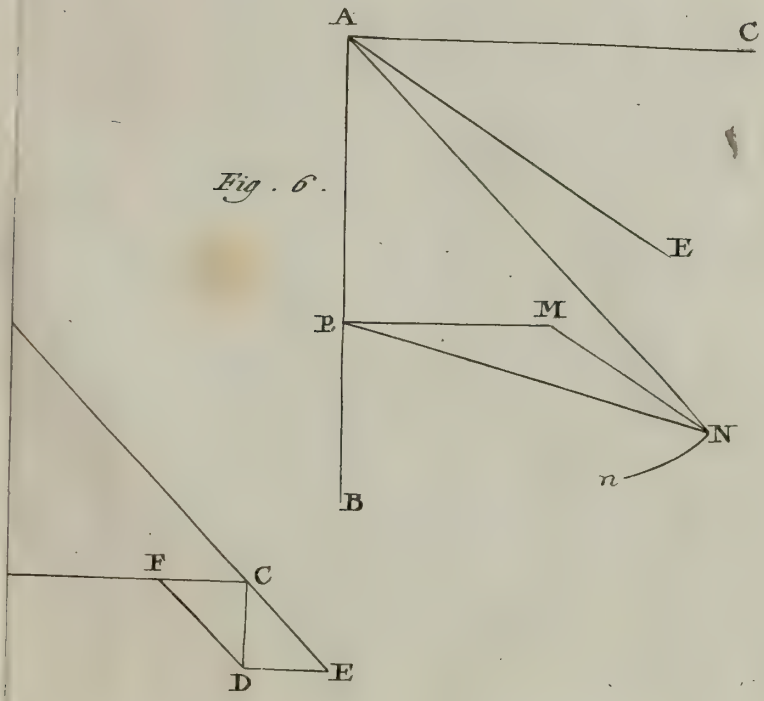


Fig. 6.



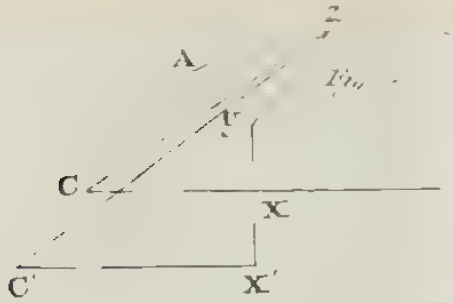


Fig. 1.

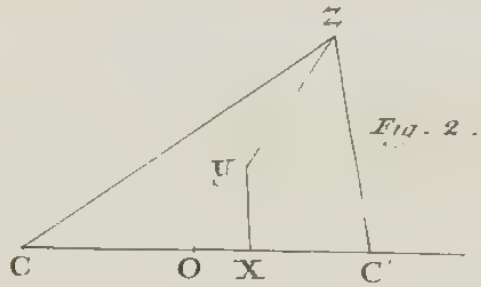


Fig. 2.

Fig 3

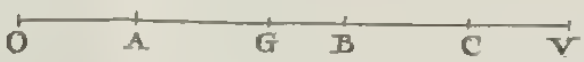


Fig 4

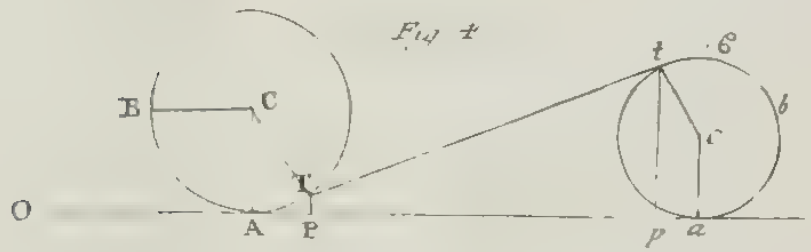


Fig 5

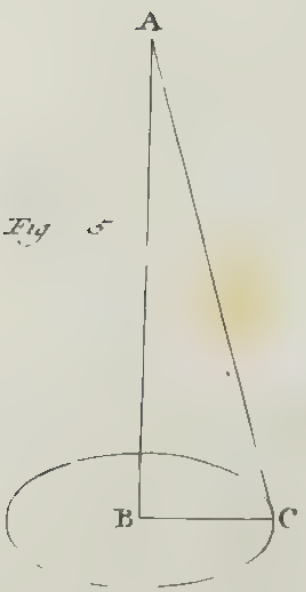


Fig. 6

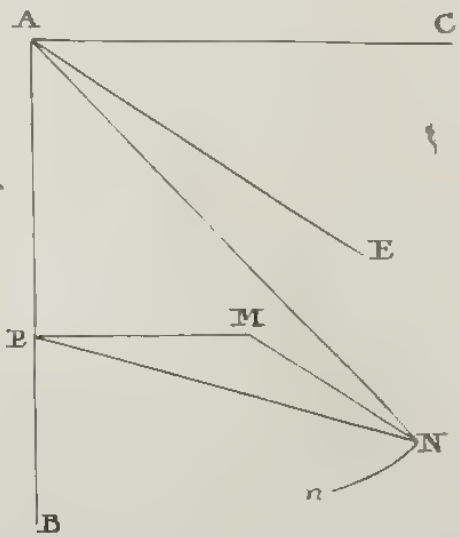
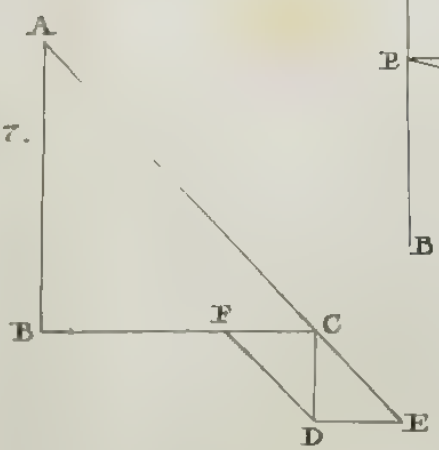
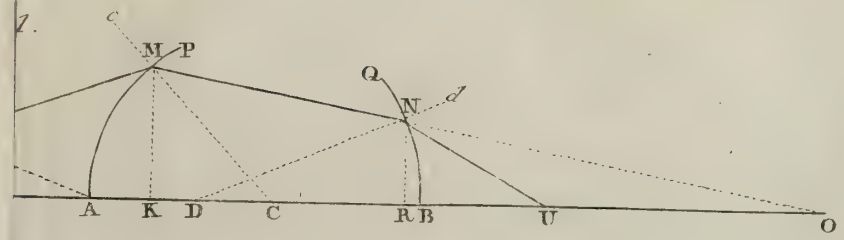


Fig 7.





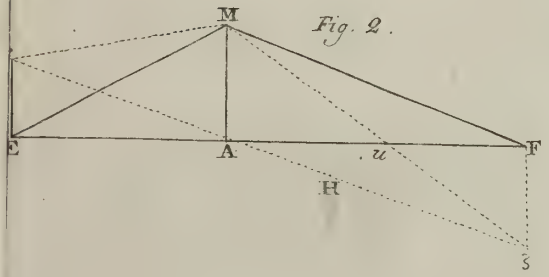


Fig. 2.

Fig. 3.

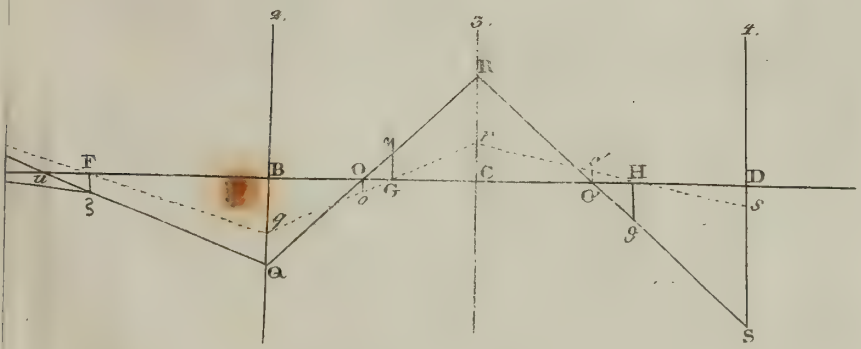


Fig. 4.

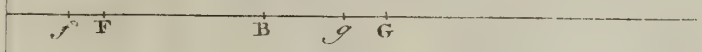


Fig. 1

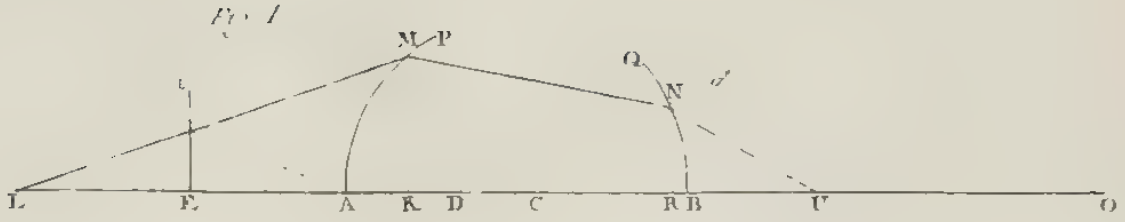


Fig. 2

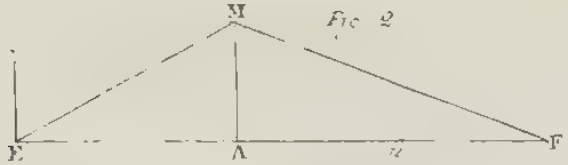


Fig. 3

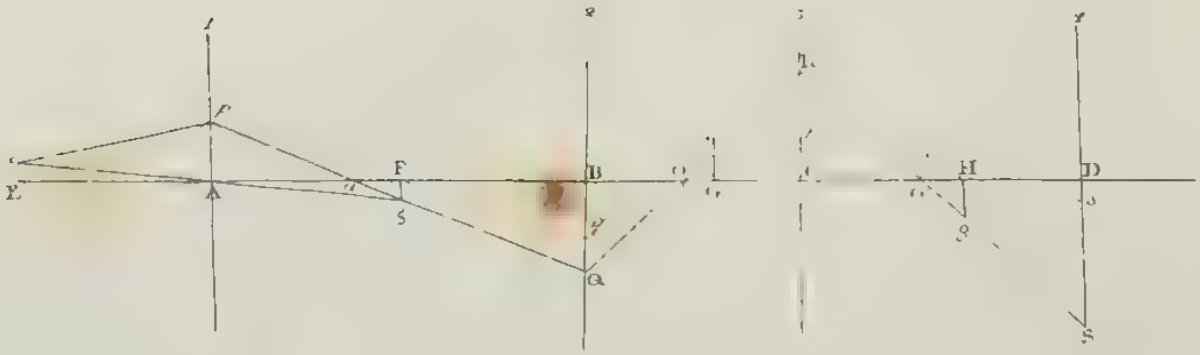
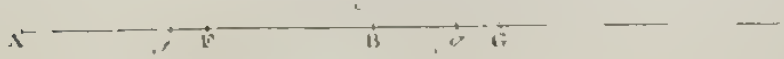


Fig. 4



— a latere .

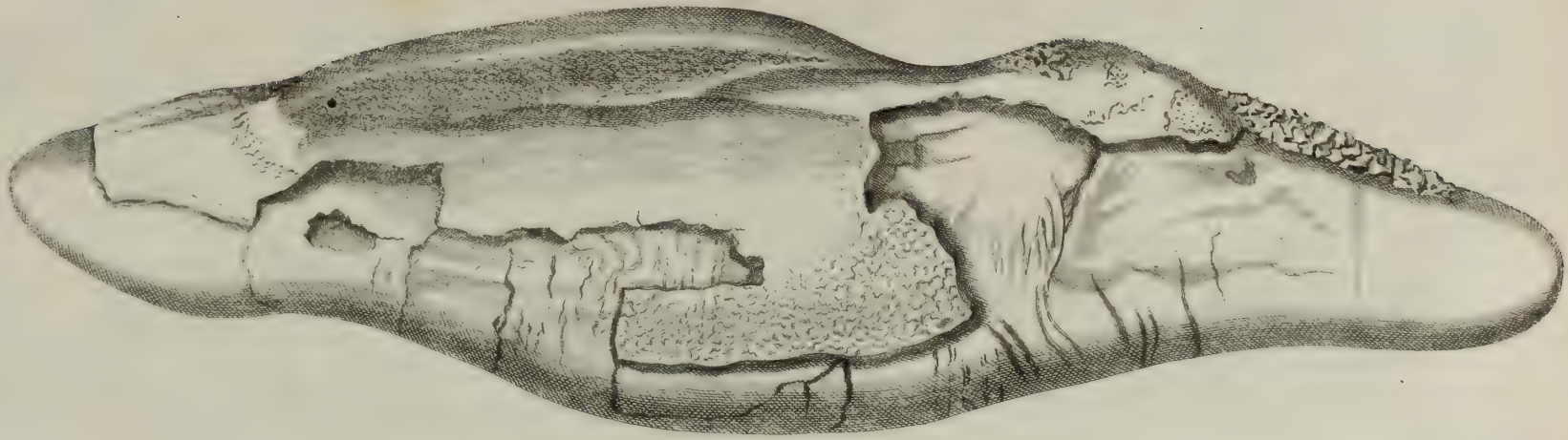
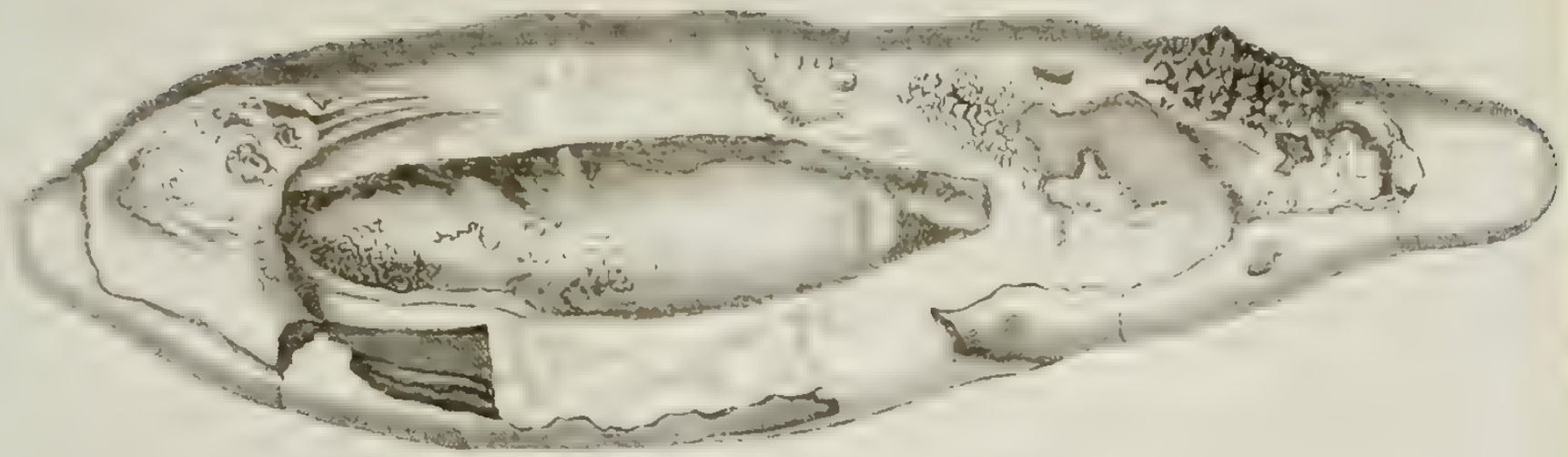
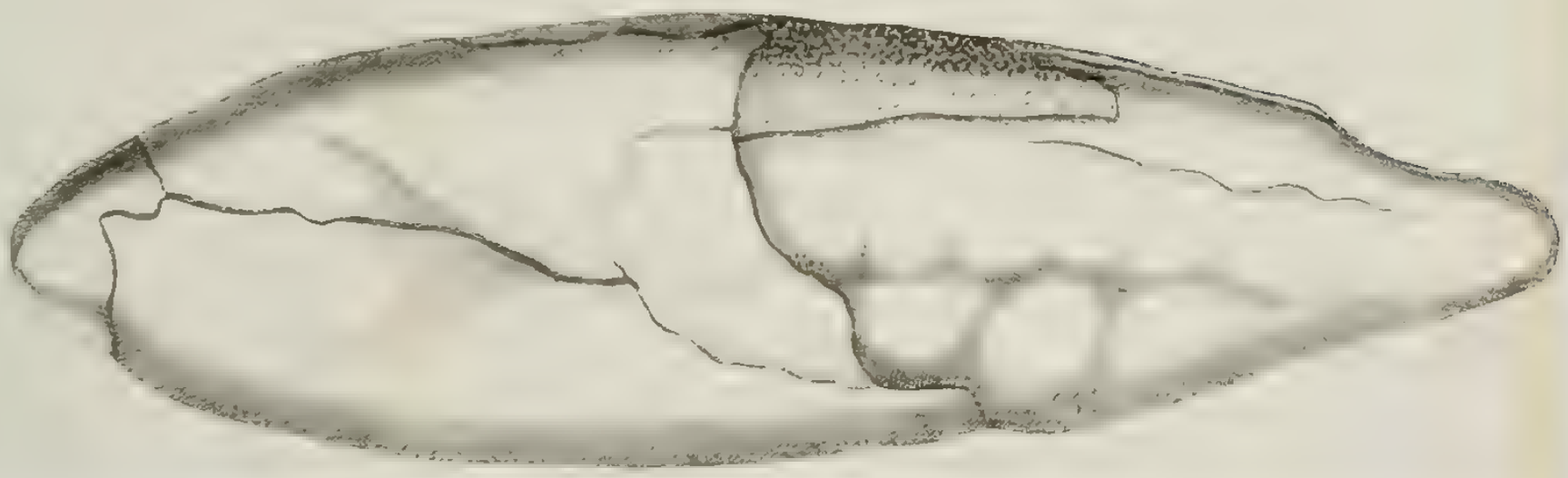


Fig. 1. a superiori.



— ab inferiori.



— — a latere.

Fig II

Nova acutiens pag 235

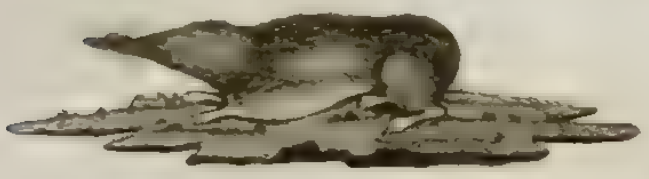
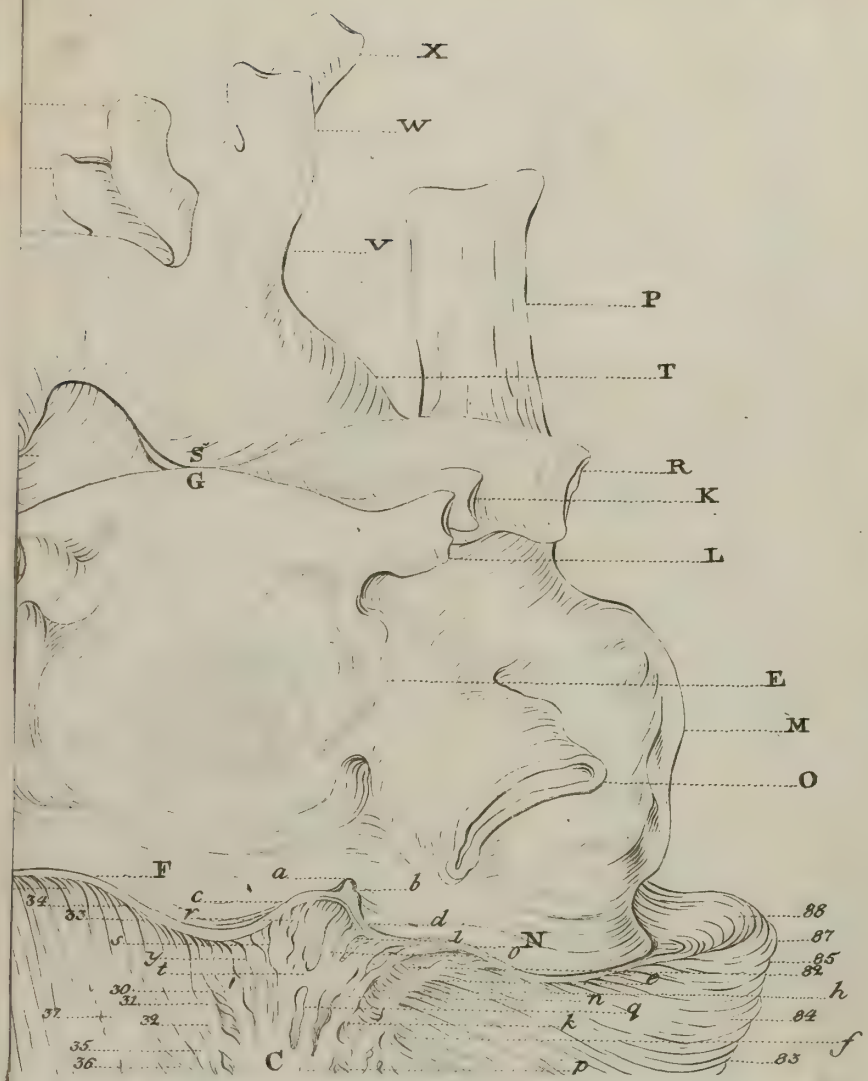
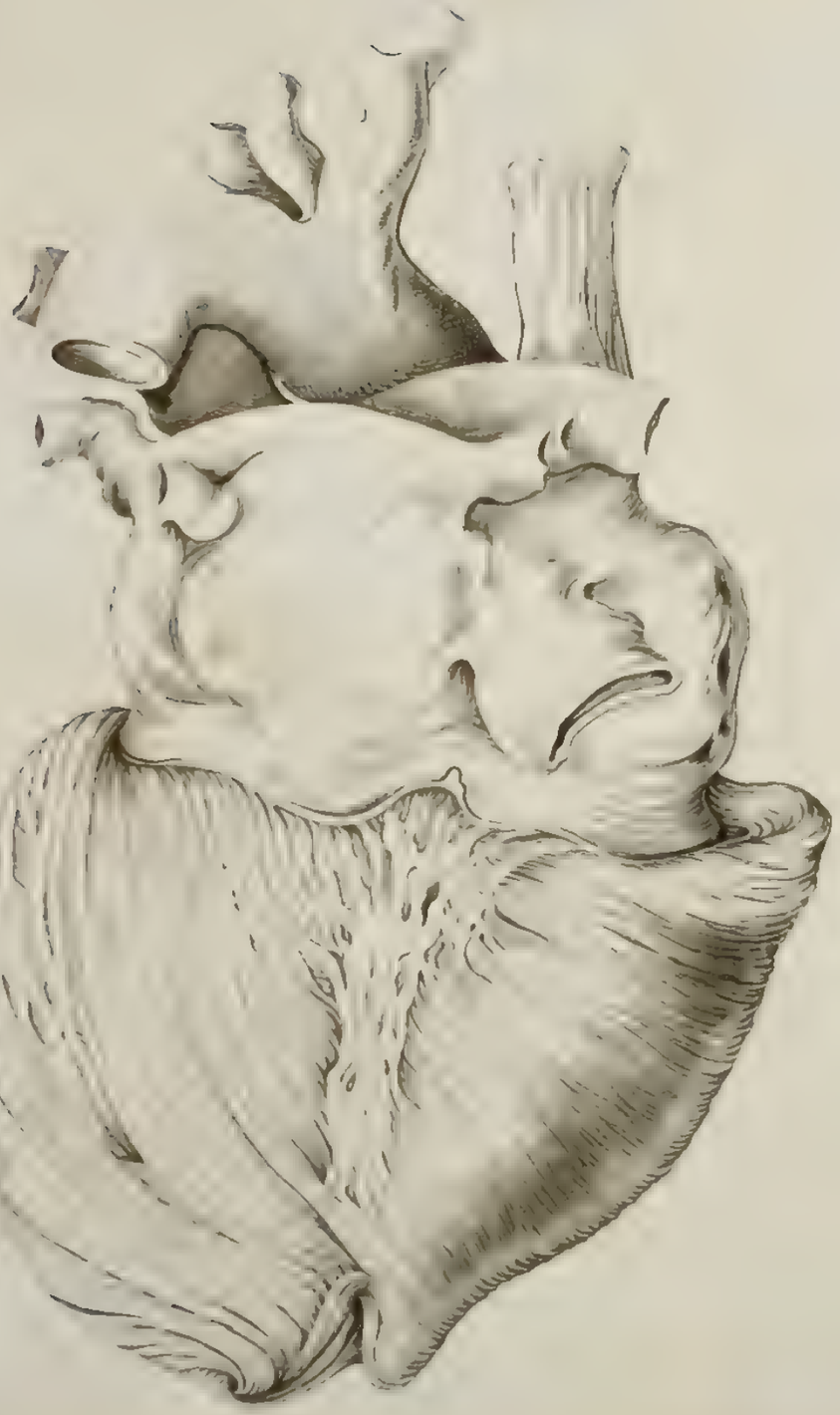


Fig. I.


X
W
V
P
T
S
G
R
K
L
E
M
O
F
a
b
c
d
N
C
34
33
31
30
37
32
35
36
88
87
85
82
84
83
h
f



X
Y
Z
W
V
P
T
R
K
L
E
M
O
Q
Q
H
I
D
S
G
F
A
C
N
B
a
b
c
d
e
f
g
h
k
l
m
n
p
q
r
s
t
v
w